*

En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.

*

Morten Rognes

1985

*

Filosofisk institutt, Universitetet i Oslo

INNHOLD

§0 Om formålet med dette skrift....1

§1 Om innholdet....1

§2 Uttrykk....2

§2.1 Om hva som menes med en konstruksjon....2

§2.2 Variabeltegn. 3

§2.3 De logiske konstruksjonene....3

§2.4 De ikke-logiske konstruksjonene....3

§3 Første-ordens språk....4

§4 Språket for ren identitetsteori og språket for mengdelære....5

§5 Noen synspunkter på predikatlogiske språk....6

§6 Enkelte bemerkninger....9

§7 Definisjon av uttrykket "logisk aksiom i et første-ordens språk"....9

§8 Definisjon av begrepet 'første-ordens teori'....10

§9 Avgrensning av de kvantifikasjonsteoretiske og identitetsteoretiske sannheter i et førsteordens språk L....11

§10 Det mengdeteoretiske grunnlag....12

§10.1 Avgrensning og definisjon av ZFCu-aksiomene i et første ordens språk L....13

§10.2 Definisjon av uttrykket "ZFCu-aksiom i L"....15

§11 Bestemte beskrivelser og mengdeabstraksjonstermer....16

§11.1 Eleminering av bestemte beskrivelser og mengdeabstraksjonstermer. Regler for hvordan formlene i L:b kan oversettes til dem i L....16

§11.2 Regel for eliminering av bestemte beskrivelser....17

§11.3 Regel for eliminering av mengdeabstraksjonstermer....17

§12 Elementære mengdeteoretiske begreper. Innledning....18

§13 Elementære mengdeteoretiske begreper....19

§14 Relasjons - og funksjonsbegrepet. 20

§15 Ordinaltall og kardinaltall....22

§16 Satser i mengdelæren....24

§17 Innføring av de reelle tall og et aksiomsystem for de reelle tall....25

§17.1 Fire nye primitive predikater. 25

§17.2 Definisjoner av en rekke viktige begreper i teorien om de reelle tall....25

§17.3 Et aksiomsystem for mengden av de reelle tall....29

§17.4 Kommentarer til aksiomsystemet....29

§17.5 Distinksjonen mellom addisjon og multiplikasjon mellom ordinaltall og reelle tall.....30

§17.6 Reduksjon av teorien om de reelle tall til mengdelære.....31

§18 Konklusjon og oppsummering.....33

Copyright beskrivelse.....37

§0 Om formålet med dette skrift.

Hovedformålet med dette skrift er å fiksere den logiske notasjon og terminologi som vil bli benyttet i en rekke senere arbeider. Dessuten er hensikten å beskrive den versjon av den klassiske predikatlogikk med identitet som vil bli lagt til grunn i disse arbeidene. I tillegg til dette er formålet å gi en beskrivelse av de aksiomer som inngår i det mengdeteoretiske system som det vil bli gjort bruk av, samt gi en oversikt over alle de begreper av mengdeteoretisk og matematisk natur som vi etterhvert vil ta mer eller mindre for gitt. Formålet er altså å gi en detaljert og nøyaktig oppsummering av de viktigste sider ved det logisk-tekniske verktøy som er vesentlig i en rekke av våre arbeider. Dette skrift inneholder derfor svært lite nytt som ikke er kjent fra vanlige lærebøker i matematisk logikk og mengdelære, og det ville være en misforståelse av forfatterens intensjoner om man oppfattet vedkommende som en som i denne forbindelse ønsker å si noe av original karakter. Unnskyldningen for å skrive dette arbeid har altså vært, som antydet ovenfor, å samle alle elementære definisjoner av viktige begreper på et sted slik at man slipper langtekkelige og delvis trettende utredninger om dette senere og i andre arbeider. [1]

§1 Om innholdet.

Den følgende oppsummering gir en oversikt over det viktigste av innholdet. I §2 – §6 gjør vi rede for hva vi legger i begrepene uttrykk, konstruksjon, variabeltegn, logisk konstruksjon, ikke-logisk konstruksjon og første-ordens språk. Dessuten avgrenses visse typer av første-ordens språk. I §7 angis hva som menes med de logiske aksiomene i et første-ordens språk L, og det blir gitt definisjoner av slutningsreglene modus ponens og universell generalisering. I §8 innføres begrepet første-ordens teori og bevisbegrepet i forbindelse med første-ordens teorier. I tillegg innføres en rekke begreper av syntaktisk natur. I §9 avgrenses de kvantifikasjonsteoretiske og identitetsteoretiske sannheter i et første-ordens språk L og i §10 defineres klassen av de mengdeteoretiske aksiomene vi vil benytte. Disse er i det vesentlige aksiomene i Zermelo-Fraenkel systemet utvidet med utvalgsaksiomet, men modifisert slik at man tillater eksistensen av såkalte "urindivider". Bestemte beskrivelser og mengde-abstraksjonstermer innføres i §11 og det gis i denne paragrafen detaljerte regler for hvordan de skal elimineres. §13 inneholder de definisjonene som vil bli benyttet når det gjelder elementære mengde-teoretiske begreper som snitt, union, komplement, null-mengde, allmengde, ordnet par, n-tuple, osv. I §14 innføres relasjons- og funksjons-begrepet og relaterte begreper. §15 inneholder definisjoner av de begrepsdannelser som trengs i forbindelse med ordinaltall og kardinalltall. I §16 blir det gjort rede for de teoremer som kan utledes i vårt mengdeteoretiske system og i §17 innføres de rasjonale og reelle tall samt de begreper av matematisk natur som trengs i forbindelse med dem. Vi viser hvordan disse begrepene kan defineres ved hjelp av de mengdeteoretiske grunnbegrepene. Endelig befinner det seg i §18 en konklusjon og oppsummering.

---

[1] I dette arbeidet gir vi derfor ingen begrunnelse for de definisjoner vi innfører. Imidlertid kan en begrunnelse for å definere de begreper vi innfører på den måten vi faktisk gjør det finnes ved å konsultere de skrifter vi henviser til. Vi kunne selvfølgelig ha gitt en detaljert begrunnelse for de enkelte definisjoner, men da ville dette arbeidet måtte ha bli utvidet slik at det ble en tilfredstillende lærebok i klassisk predikatlogikk og mengdelære. Dette er aldeles unødvendig siden tilfredstillende lærebøker av denne typen allerede finnes blandt de arbeider vi refererer til. Se f.eks. Quine[1] og [2], Stoll [1], Shoenfield [1], og Takeuti [1] og [2].

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§2 Uttrykk.

Det tas her for gitt at leseren kjenner de store og små bokstavene i det norske alfabet, videre kjenner tegnene "(", ")", ".", ",", " ' ", som er henholdsvis venstrehåndsparantestegnet, høyrehåndsparantestegnet, punktum, komma og apostrofftegnet. Videre innføres det følgende tegn, "*", som et tegn for åpen plass. Mengden av nøyaktig de tegn og bare de tegn som så langt har blitt nevnt vil vi kalle for TE. Med et *uttrykk* forstås enhver endelig sekvens av tegn hentet fra mengden TE. Mengden av alle uttrykk vil i det følgende bli betegnet med "E".[2] Uttrykket "endelig sekvens" må her tillegges sin vanlige mengdeteoretiske betydning. Man ser at alle vanlige setninger i norsk som bare inneholder bokstaver og tegn som er med i TE er uttrykk i den betydning som nå er definert, forutsatt at mellomrommet mellom de enkelte ord i setningene fylles ut med tegnet for åpen plass. F. eks. vil tegnsekvensen "Ole*går" være et uttrykk. Leseren kan selv konstruere talløse andre eksempler.

§2.1 Om hva som menes med en konstruksjon.

Med en n-ær konstruksjon over klassen av uttrykk, der n er et naturlig tall og $n \geq 1$, forstås en funksjon som til ethvert n-tuple av uttrykk tilordner et uttrykk i den betydning som ble definert i forrige paragraf. Ser man f. eks. på tegnsekvensen:

(1) "Det er ikke slik at x"

får man alltid som resultat en tegnsekvens i E dersom man skyter inn en tegnsekvens fra E på det sted hvor tegnet "x" befinner seg i uttrykket (1). (1) gir en derfor et konkret eksempel på en konstruksjon i den betydningen som nå har blitt innført. Mer spesielt er dette et eksempel på en unær konstruksjon.

Som et eksempel på en binær konstruksjon over klassen av uttrykk kan man betrakte den følgende tegnsekvens:

(2) "Det er både slik at x og slik at y"

Tar man her for seg to uttrykk fra mengden E og setter det første inn på den plassen som hvor det står "x" i uttrykket ovenfor og setter det andre inn på det sted hvor det står "y" i tegnsekvensen ovenfor, får man – som man åpenbart ser – en lengre tegnsekvens som er et uttrykk, mao. et element i E. Når det i det følgende vil bli angitt konstruksjoner vil dette vanligvis gjøres som illustrert ved (1) og (2), eventuelt ved å sette en eller flere streker på de steder hvor det er tillatt at man setter inn uttrykk.

§2.2 Variabeltegn.

Med variabletegnene forstår vi nøyaktig de tegnene som forekommer i den følgende sekvens:

(1) x, y, z, w, x', y', z', w', x", y", z" .....

[2] Vi innfører her et begrep "uttrykk" som er langt snevrere enn det man vanligvis har i tankene. Vi foretar denne innsnevring av begrepet fordi det er formålstjenlig her.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Variabeltegnene vil vi også tenke oss alfabetisk ordnet i den rekkefølge som er angitt ved (1). Variabeltegnet " x" " kommer altså senere i den alfabetiske ordningen en variabeltegnet " z' ". Variabeltegnet " w" " etterfølges umiddelbart av variabeltegnet " x"' " i den alfabetiske ordning. Leseren kan selv på egen hånd gi flere eksempler. Det er av en viss betydning at variabeltegnene er ordnet på en bestemt måte. Når vi senere vil formulere visse eleminasjonregler for bestemte beskrivelser og mengdeabstraksjonstermer vil få bruk for dette. Det er av denne grunn vi har angitt ordningen av variabeltegnene som er anskueliggjort ved (1).

§2.3 De logiske konstruksjonene.

De logiske konstruksjonene er nøyaktig de åtte konstruksjonene som er oppført på den følgende liste:

(1) "For alle objekter x er det slik at a"
Denne konstruksjonen forkortes med uttrykket "(Ax)a"
(2) "Det eksisterer minst et objekt x som er slik at a"
Denne konstruksjonen forkortes med uttrykket "(Ex)a"
(3) "Det er ikke slik at a "
Denne konstruksjonen forkortes med "¬a"
(4) "Det er både slik at a og slik at b"
Denne konstruksjonen forkortes med "a&b"
(5) "Det er enten slik at a eller slik at b"
Her brukes forkortelsen "avb"
(6) "Hvis det er slik at a så er det slik at b"
Her benytter vi forkortelsen a–>b
(7) "Det er slik at a hvis og bare hvis det er slik at b"
Vi benytter som forkortelse her : " a <-> b"
(8) "x er identisk med y"
Denne konstruksjonen skal vi forkorte med "x = y"

Dermed er det blitt gitt en fullstendig liste over de konstruksjonene som her vil bli omtalt som logiske. Som man ser er (1) og (2) henholdsvis allkvantoren og eksistenskvantoren, (3) - (7) de vanlige utsagnslogiske konnektivene og (8) identitetspredikatet.

§2.4 De ikke-logiske konstruksjonene.

Enhver konstruksjon i den betydning som nå har blitt definert og som ikke er blandt konstruksjonene i forrige paragraf vil vi per definisjon kalle en *ikke-logisk konstruksjon*. Blandt de ikke-logiske konstruksjonene begrenser vi oss til en bestemt type, nemlig de n-ære predikatkonstruksjonene ($n \geq 1$). Med en n-ær predikatkonstruksjon forstås enhver konstruksjon som til ethvert n-tuple ($n>1$) av uttrykk som er singulære termer alltid tilordner en setning, dvs. et uttrykk som enten er sant eller falskt. Denne definisjonen gir selvfølgelig bare mening om man anser uttrykkene "singulær term" og "setning" som meningsfulle. Definisjonen er utelukkende ment å være helt provisorisk. Strengt tatt trengs den ikke fordi vi i praksis alltid bare vil arbeide med et endelig antall predikatkonstruksjoner og det er da alltid mulig å avgrense dem som trengs ved å lage en helt konkret, endelig liste over dem. I de

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

tilfelle hvor det dreier seg om uendelig mange predikater vil det også alltid være mulig å avgrense dem presist uten å henvise til uttrykkene "singulær term" eller "setning", som det akkurat her ikke er nødvendig å gi noen ytterligere bestemmelser av. Som eksempler på predikat konstruksjoner gis her først to svært viktige, nemlig:

(1) "x er en mengde"
Vi benytter forkortelsen "M(x)" for denne konstruksjonen.
(2) "x er et element i mengden y"
I forbindelse med dette predikat benytter vi i det følgende forkortelsen "xêy".

Disse to konstruksjonene kalles for *de mengdeteoretiske konstruksjonene*. Unære konstruksjoner vil også bli omtalt som "predikater", binære predikatkonstruksjoner vil vi også kalle for "relasjonsuttrykk" eller "dyadiske predikater". Som eksempler på predikater nevner vi her de følgende: "x er en mulig verden", "x er en funksjon", "x er et atom", "x er et molekyl", "x er en ikke-logisk konstruksjon", "x er en tiger som lever i det indre av Afrika". Leseren kan på egenhånd forlenge listen med talløse andre eksempler. Som eksempler på dyadiske predikater nevner vi: "x er en sirkel som har større diameter enn sirkelen y", "x er et menneske som veier mer enn mennesket y", "x er et tidspunkt som kommer etter tidspunktet y". Igjen overlater vi til leseren å forlenge listen. De eksempler vi har gitt er forøvrig helt vilkårlig valgt.

§3 Første-ordens språk.

Man kan nå gå et steg videre å innføre begrepet *første-ordens språk,* eller som man kunne kalle disse strukturene: predikatlogiske språk med identitet.

Med et første-ordens språk L over klassen av uttrykk E (eller kortere "første-ordens språk") forstås et fem-tuple der de enkelte komponentene i tuplet oppfyller de følgende krav: (i) Den første komponenten i tuplet er mengden av uttrykk E som vi har definert ovenfor. (ii) Den andre komponenten er den klassen av variabeltegn som vi også tidligere har definert. (iii) Den tredje komponenten er klassen av logiske konstruksjoner slik den har blitt innført ovenfor. (iv) Den fjerde komponenten er en - eventuelt tom - mengde med ikke-logiske predikatkonstruksjoner. (v) Den femte komponenten er den minste uttrykksmengden X som oppfyller de følgende tre krav:

(a) Er P en vilkårlig valgt n-ær predikatkonstruksjon i språket (n≥1) og x;1 ... x;n en rekke av n vilkårlig valgte variabeltegn så er "(P(x;1,....,x;n))" med i X.
(b) Er x og y to vilkårlige variabeltegn så er "(x = y)" med i X.
(b) Er a og b to elementer i X og er x et eller annet variabeltegn så er uttrykkene "(a&b)", "(avb)", "(¬a)", "(a->b)", "(a<->b)", "((Ax)a)", "((Ex)a)" med i X.

Dette avslutter definisjonen av første ordens språk. [3]

[3] Det bør bemerkes at vi definerer uttrykket "L er et første-ordens språk over E" her og at vi egentlig ikke har gitt noen definisjon av predikatet "L er et første-ordens språk". Når vi senere taler om første-ordens språk uten kvalifikasjoner er det "første-ordens språk over uttrykksklassen E" som menes. Vi vil imidlertid i et annet arbeid gi en rent mengde-teoretisk definisjon av predikatet "L er et første ordens språk". På grunnlag av denne

En rekke kommentarer er på sin plass i forbindelse med denne definisjonen. Er L et første-ordens språk kalles den siste komponenten i språket for formlene i L og vi betegner denne mengden med "Fm(L)". Vi definerer hva som menes med at et variabeltegn forekommer fritt i en formel på vanlig måte. De formler i L hvor ingen variabeltegn forekommer fri kalles de lukkede formlene i L og mengden av alle disse betegnes med "CFm(L)". Med en *setning* i et første-ordens språk forstås en lukket formel i språket. Det er også av viktighet å bemerke det følgende: Er a en formel i L og x;1, ... ,x;n de eneste variabeltegnene som forekommer fri i formelen a, vil vi ofte i stedet for "a" skrive "a(x;1,....,x;n)". Er videre t;1, ..., t;n termer betegner a;(x;1,...,x;n)[t;1,...,t;n] resultatet av samtidig å sette inn termene t;1, ..., t;n for variabeltegnene x;1, ..., x;n i formelen a. Det forutsettes da at termene t;1, ..., t;n ikke inneholder fri variabler som bindes av kvantorer som forekommer i a. Det må også bemerkes at vi krever av et første-ordens språk L at alle konstruksjonene som forekommer i det har innbyrdes ikke-overlappende (disjunkte) verdiområder. I denne forbindelse må man huske at en n-ær konstruksjon er en funksjon som til ethvert n-tuple over mengden E tilordner et element i E og at verdiområdet til en konstruksjon er alle de uttrykkene som konstruksjonen tilordner de diverse n-tupler over E.

§4 Språket for ren identitetsteori og språket for mengdelære.

Etter at det nå har blitt gitt en tilstrekkelig presis definisjon av første-ordens språk er det naturlig å gå et steg videre og avgrense visse spesielle slike språk og visse spesielle klasser av slike språk. [4]

Vi kaller det første-ordens språket over klassen av uttrykk hvor den fjerde komponenten – klassen av ikke-logiske konstruksjoner – er tom, for "L;=", eller språket for den rene identitetsteori.

Man bør i denne forbindelse bemerke det følgende vedrørende første-ordens språk i betydningen ovenfor: Man ser fra definisjonen av et slikt språk at det består av fem komponenter. Av disse er imidlertid de tre første alltid fiksert og konstante, videre er den femte komponenten entydig bestemt straks den fjerde er bestemt. Siden den fjerde komponenten er klassen av ikke-logiske konstruksjoner vil et første-ordens språk alltid være entydig bestemt dersom man angir nøyaktig hvilke ikke-logiske konstruksjoner det er som inngår i det. For øvrig kaller vi de ikke-logiske konstruksjonene i et første ordens språk for det *ikke-logiske vokabularet* til språket.

Vi kaller det første-ordens språket hvor klassen av alle de ikke-logiske predikat-konstruksjonene inneholder nøyaktig de følgende to konstruksjoner og ingen andre, nemlig:

(1) "x er en mengde"
(2) "x er et element i mengden y"

som vi forkorter med henholdsvis "Mng(x)" og "xêy" for "L;ê", eller for språket for mengdelære.

---

siste definisjonen kan man så vise at klassen av første-ordens språk over E er strengt inkludert i klassen av første-ordens språk.

4 Som det fremgår av vår definisjon av første-ordens språk er ikke konstanter eller n-ære funksjonssymboler ($n \geq 1$) inkludert blandt konstruksjonene i slike språk. Vår definisjon avviker derfor litt fra den som f.eks. er gitt i Shoenfield [1] på side 14 i §2.4.

Det er en velkjent ting at de aller fleste begreper innenfor de klassiske disipliner av matematikken kan defineres ved hjelp av disse to konstruksjonene. Dette er naturlig nok en svært viktig grunn til å være interessert i dette språket.

Anta nå at Δ er en mengde med ikke-logiske konstruksjoner og at L er et første-ordens språk. Da er L[Δ] det språket som fremkommer som resultat når det ikke-logiske vokabularet til L utvides med konstruksjonene i Δ. Det må forut-settes at konstruksjonene i Δ er av en slik art at om de legges til konstruksjonene som allerede foreligger i L så får man som helhet en konstruksjons-mengde der verdiområdene til de diverse konstruksjonene er innbyrdes disjunkte. Dette krav må stilles for å sikre den entydige lesbarheten til formlene i L[Δ], dvs. det forhold at hver formel i L[Δ] må kunne genereres på nøyaktig en og bare en måte. Forøvrig må man også stille det krav til første-ordens språk at verdiområdene til de forskjellige predikatkonstruksjonene ikke har felles elementer med klassen av variabeluttrykk eller elementene i de enkelte logiske konstruksjoners verdiområder. La oss tilslutt bemerke at L;ê[Δ] er det språket vi får som resultat når konstruksjonene i mengden Δ legges til det ikke-logiske vokabularet i språket L;ê, dvs. språket for mengdelære.

§5 Noen synspunkter på predikatlogiske språk.

I denne paragrafen skal vi ta det for gitt at leseren forstår hva som menes med en meningsfull n-ær predikatkonstruksjon i norsk, der $n \geq 1$. Det vil altså ikke bli gjort noe forsøk på å definere denne mengden mer presist. Mengden av disse predikatkonstruksjonene betegnes i det følgende med "P". Det er imidlertid ikke så vanskelig å gi eksempler på hva som kan anses som meningsfulle predikater i språket norsk; vi har tidligere i §2.4 gitt minst elleve eksempler. Som man sikkert vil akseptere kan denne listen utvides i nær sagt det uendelige. I det følgende begrenser vi oss utelukkende til å betrakte første-ordens språk der det ikke-logiske vokabularet består av det som her kalles, noe vagt, meningsfulle predikatkonstruksjoner i norsk. Mao. vil kun språk i mengden av alle de L[Δ] der Δ er inkludert i P bli omtalt.

For å unngå misforståelser kan det på dette punkt være gunstig å fremsette visse synspunkter og kommentarer til språkene i denne klassen.

Er L et språk i denne mengden, f. eks. L;ê, bør man merke seg at ingen av setningene i L vil inneholde noen spesielle logiske tegn og symboler utover parantestegnene og variabeltegnene. To eksempler kan bidra til å belyse dette. Vi ser først på tegnsekvensen "(Ex)M(x)". Denne tegnsekvensen er egentlig ikke noe uttrykk slik vi ovenfor avgrenset mengden av uttrykk. Men den forkorter en setning i L;ê som når den skrives helt ut vil se slik ut:

(1) "(Det eksisterer minst et objekt x som er slik at (x er en mengde))"

Dette uttrykket er en setning i L;ê, og man ser at den ikke inneholder noen spesielle tegn eller symboler bortsett fra parantestegnene og variabeltegnet "x". Vi ser dernest på formelen "(Ex)M(x) & (Ex)(¬M(x))". Hvis man husker på de forkortningskonvensjonene vi tidligere har innført innser man raskt at denne formelen forkorter den følgende setning i L;e:

(2) "(Det er både slik at (Det eksisterer minst et objekt x som er slik at (x er en mengde)) og slik at (Det eksisterer minst et objekt x som er slik at (Det er ikke slik at (x er en mengde))))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Også ved denne setningen ser man at den ikke inneholder noen tekniske symboler, bortsett fra paranteser og variabeltegn som gjør det entydig hvordan formelen skal leses. Det samme gjelder for de andre språkene i familien L[Δ] der Δ er inkludert i P.

Er nå setningene (1) og (2) grammatiske setninger i norsk? Hvis man med en grammatisk setning mener en setning som er grammatisk utfra reglene oppstillt i en eller annen autorativ grammatikk for norsk, eller en setning som kan brukes i vanlig norsk tale uten å støte språkfølelsen til norsk-kompetente, er det i høyeste grad tvilsomt om (1) og (2) kan regnes som grammatiske setninger. Men det er trolig at dette er av mindre betydning. Hvis man derimot er opptatt av klassen av alle meningsfulle deskriptive påstandssetninger i norsk er det to ting som kan bemerkes. For det første er det ingenting som tilsier at disse skal være grammatiske i skolegrammatikkens forstand eller i den andre betydningen som ble angitt ovenfor. Våre vanlige måter å danne setninger på behøver på ingen måte å være adekvate når svært kompliserte og interessante påstander av vitenskapelig eller filosofisk natur skal gis uttrykk, eller om man ønsker å avdekke forskjellige logiske relasjoner mellom påstander og gi språkelig uttrykk for dette i setninger. For det andre er det vanskelig å se noen gode grunner som taler mot at setningene (1) og (2) kan regnes som meningsfulle deskriptive påstandssetninger i norsk. Dette gjelder forøvrig alle de andre setningene i L;e, såvel som setningene i L;=. Det er da nærliggende å generalisere og si at dette trolig gjelder alle språkene i familien <L;=[Δ]>/Δ inkl P/. Det må innrømmes at dette kanskje er mer usikkert. Men vi kan ved det nåværende tidspunkt ikke se noe klart moteksempel. Konklusjonen er derfor den at alle setningene i de diverse L i familien <L;=[Δ]>/Δ inkl P/ er meningsfulle deskriptive påstandssetninger i norsk. Dette innebærer at disse språkene ikke på noen måte kan oppfattes som rent formelle uintepreterte språk.

På dette punkt er det vanskelig å unnlate å ta opp og kommentere to nokså viktige spørsmål. For det første kan man spørre om enhver meningsfull deskriptiv setning i norsk kan adekvat reformuleres ved hjelp av en setning innenfor et første-ordens språk i familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/ slik vi noe vagt har avgrenset den. Til dette spørsmål kan vi ikke gi noe annet svar enn at vi overhodet ikke er i stand til å se noen fornuftig grunn for at dette skulle være tilfelle. Det kan også legges til at vi heller ikke har sett noen filosof eller logiker som tilnærmelsesvis har argumentert til fordel for dette på en plausibel måte. Dette motsier naturligvis ikke den ting at logisk praksis med anvendelse av predikatlogikk viser at svært mange systemer av meningsfulle deskriptive påstandssetninger i norsk kan på en rimelig måte reformuleres ved hjelp av setninger innenfor et første-ordens språk. Men den generelle påstand som ble nevnt virker ubegrunnet.

For det andre kan man spørre om det er mulig innenfor språk i klassen <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/ å formulere teorier av interessant karakter, og mer spesielt om det er mulig å formulere teorier som fra en filosofisk synsvinkel må kunne karakteriseres som interessante. Når det gjelder den første delen av dette spørsmålet synes svaret å være bekreftende. Man kan nevne en rekke teorier som er formulert, eller som lett kan formuleres i første-ordens språk, som må kunne karakteriseres som svært interessante. Man kan nevne forskjellige mengde-teoretiske systemer, f. eks. ZFC, systemet til Gødel-von Neumann - Bernays, Quines mengdeteoretiske systemer. Videre kan man nevne forskjellige formuleringer av den elementære tallteori, av analysen, av nesten alle deler av geometrien osv. Kort sagt synes det som en svært stor del av alle de teorier som har blitt fremsatt innenfor det området som noe vagt kan karakteriseres som klassisk matematikk kan formuleres innenfor rammen av første-ordens språk. Men det virker berettiget å si at anvendelsesområdet til den vanlige predikat-logikk er langt videre og mer omfattende enn matematikken. Overalt hvor man har med et område D av entiteter å gjøre og hvor man kan peke ut et bestemt antall relasjoner og mengder over dette domenet, kan det i prinsippet innføres relasjonsuttrykk og predikater som har de utpekte relasjoner og mengder som sin ekstensjon. I et første-ordens språk som har disse relasjonsuttrykk og

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

predikater som ikke-logiske symboler vil det da være mulig å formulere uendelig mange setninger, såvel av generell som av mer spesiell natur, som sier noe om det innbyrdes forhold mellom disse mengder og relasjoner. Det virker derfor som om systemer av setninger innenfor første-ordens språk kan innføres på alle vitenskapens områder, og det synes vanskelig å se noen grunn til at ikke noen av disse teorier skulle kunne være høyest interessante. Den første delen av spørsmålet kan derfor tilsynelatende besvares bekreftende.

Når det gjelder den andre delen av spørsmålet, om teorier som er interessante fra en filosofisk synsvinkel kan formuleres innenfor rammen av første-ordens språk i vår forstand, er forholdet muligens mer problematisk. Merk her at spørsmålet ikke er om filosofiske teorier som har blitt ansett som interessante, kan reformuleres innenfor rammen av første-ordens språk, eller at deler av dem kan det. Når det gjelder dette spørsmål vil det ikke bli tatt noen stilling til det her, men bare bemerke at et bekreftende svar også her kan virke plausibelt i visse tilfelle. Spørsmålet er om det er mulig å spesifisere et første-ordens språk L i familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/ og en rekke setninger i L der disse setningene uttrykker noe som er høyest interessant fra en filosofisk synsvinkel. Det virker svært rimelig å hevde at dette er mulig. Som man sikkert vil være enig i er den mest naturlige måten å argumentere for dette på å spesifisere, konkret og i detalj, minst et slikt språk og så fremvise, også i detalj og konkret, en rekke setninger i språket som uansett hva man nøyaktig måtte mene med "interessante" av de fleste ville bli regnet som interessante fra en filosofisk synsvinkel. Vi vil her bare ta for oss et slikt eksempel og antyde visse forhold som kan støtte vår påstand. Vi betrakter de følgende predikat-konstruksjoner: (1) "x er en mulig verden", (2) "x er et presist deskriptivt utsagn" og (3) "x er en mulig verden hvor det presise deskriptive utsagnet y er sant". Mengden som inneholder nøyaktig konstruksjonene (1) - (3) og ingen andre kaller vi for Δ;0. Siden (1) - (3) synes å være meningsfulle predikatkonstruksjoner synes det nærliggende å anta at Δ;0 Inkl P. Man kan så betrakte L;e[Δ;0], dvs. språket for mengdelære utvidet med konstruksjonene i Δ;0 som nye ikke-logiske konstruksjoner. L;e[Δ;0] virker som et språk det kan ha betraktelig interesse å studere. I dette språk kan man i tillegg til påstander av ytterst komplisert natur om rent mengde-teoretiske forhold også uttrykke påstander om mulige verdener og presise deskriptive utsagn. F. eks, kan man formulere en setning som sier at mengden av mulige verdener eksisterer, videre setninger som sier noe om hvor stort kardinaltallet til mengden av mulige verdener er, videre generelle setninger som f. eks. at ingen mulige verdener er mengder og at ingen mulig verden er identisk med noe utsagn. Man kan også i L;e[Δ;0] formulere en rekke setninger som angir identitetsbetingelser for mulige verdener. F. eks. en setning som sier at to mulige verdener er identiske dersom og bare dersom nøyaktig de samme utsagn er sanne i dem. De eksempler vi har gitt er bare noen få og spredte eksempler og langt fra de viktigste. Men allerede disse eksemplene skulle vise at filosofisk sett interessante setninger kan uttrykkes i L;e[Δ;0]. Utvides dette språk med ytterligere tre ikke-logiske predikater, nemlig "x er et logisk mulig individ", "x er et begrep av grad y" og "x er et objekt som faller inn under begrepet y i verdenen w", kan man i tillegg formulere en lang rekke forskjellige teorier om begreper som belyser forholdet mellom begreper, utsagn, mulige verdener og mengder, og som etter vår mening overhodet ikke kan karak-teriseres som uinteressant fra en filosofisk synsvinkel. De overveielser som nå har blitt fremlagt skulle være tilstrekkelige for å vise at også den andre delen av spørsmålet ovenfor kan besvares bekreftende. En rekke andre eksempler, ved siden av de nokså spesielle som her har blitt lagt frem, synes også å bekrefte denne påstand.

§6 Enkelte bemerkninger.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Det skal nå fremsettes en del mer spredte bemerkninger før vi går videre med vår redegjørelse for en del viktige begreper i forbindelse med første-ordens språk. For det første må ikke det forhold at denne språktype er den eneste som har blitt omtalt ovenfor forlede en til å tro at vi anser denne språktype som den eneste filosofisk sett viktige eller fundamentale. Det er intet i det som vi så langt har gitt uttrykk for som berettiger en slik konklusjon. For det andre bør man ikke forledes til å tro at vi mener første-ordens språk er den eneste type logiske språk. Vi er naturligvis klar over at det finnes en vrimmel av mer eller mindre eksotiske formelle språk som det kan være verdt å studere. Man kan nevne første-ordens språk utvidet med monadiske og dyadiske modaloperatorer av forskjellig type, språk med flere forskjellige typer av variabler, språk for høyere ordens logikk, infinitære språk, infinitære språk med modaloperatorer, og en rekke mer spesielle formalismer som er utviklet for ulike formål. En slik konklusjon må derfor oppfatte som høyest uberetiget. Imidlertid er første-ordens logikk og første-ordens språk forholdsvis velanalyserte og allment akseptert og er derfor det mest naturlige redskap å gripe til når man vil anvende logikken i filosofien.[5]

§7 Definisjon av uttrykket "logisk aksiom i et første-ordens språk".

La P være klassen av alle predikatkonstruksjoner som kan tenkes innført over klassen av uttrykk i L;= og som kan sies å være meningsfulle predikat-konstruksjoner i det norske språk. Eksempelvis vil mengden Δ;0 som vi avgrenset ovenfor være inkludert i P. For hver mengde Δ Inkl P kan vi betrakte språket L;=[Δ]. Vi har derfor i §1 - §6 avgrenset en familie med første-ordens språk, <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/.

Vi vil nå for hvert språk L i denne familien avgrense klassen av de logiske aksiomene i L, som vi betegner med "LAx(L)". Dette gjøres ved de følgende regler: (i) Anta A,B êFm(L). Da er A –>(B–> A) et logisk akiom i L. (ii) Er A og B formler i L så er formelen (¬A–>¬B) –> (B–>A) et logisk aksiom i L. (iii) Er A, B og C formler i L så er formelen

(A–>(B–>C)) –> ((A–>B) –>(A–>C))

et logisk aksiom i L. (iv) Er A og A' to formler i L der A' er nøyaktig som A unntatt ved å ha y som fri variabel på et eller flere steder hvor A har x som fri variabel så er (Ax)A –> A' et logisk aksiom i L. (v) Er A og B formler i L og inneholder ikke A variabelen x som fri variabel så er (Ax)(A –>B) –>(A–>(Ax)B) et logisk aksiom i L. (vi) Er A og A' formler i L og er A akkurat som A' bortsett ved å ha en fri forekomst av variabelen y på et eller flere steder hvor A har en fri forekomst av variabelen x så er x=y –> (A –>A') et logisk aksiom i L. (vii) Er x et variabeltegn i L så er (Ax)(x=x) et logisk aksiom i L. (viii) Er A en formel i L og x et variabeltegn i L så er (Ex)A <-> ¬(Ax)¬A et logisk aksiom i L. (ix) Er A,B formler i L er (AvB) <-> ((¬A)–> B) et logisk aksiom i L. (x) Er A,B formler i L er A&B <–> ¬((¬A) &(¬B)) et logisk aksiom i L. (xi) Er A, B formler i L er
(A <–> B) <–> ((A–>B) & (B–>A)) et logisk aksiom i L.

De logiske akiomene i L, LAx(L), er altså de og bare de formler i L som er logiske aksiomer ifølge reglene (i) - (vii). [6]

---

[5] Siden dette skrift ikke er ment som noen lærebok, men som en oversikt over viktige logiske og mengdeteoretiske begreper henviser vi til Quine [2], Stoll[1] kp 4 og Shoenfield [1] kp 1 -3 for dem som ønsker en innføring i predikatlogikk med identitet. Spesielt er Quine [2] egnet for dem som nærmer seg logikken uten særlige forhåndskunnskaper.

[6] De setningslogiske og kvantifikasjonsteoretiske aksiomene vi fremsetter her er de samme som dem som nevnes i Takeuti [1] side 5. De kvantifikasjonsteoretiske aksiomene er også omtalt i Quine [2], side 191. De identitetsteoretiske aksiomene er et vanlig standardsett. Man kan f. eks. studere Quine[2] for en omtale av noen viktige punkter i forbindelse med identitet.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Fra denne definisjonen fremgår det at hvis Δ;1 Inkl Δ;2 Inkl P så har man at: LAx(L;=[Δ;1]) Inkl LAx(L;=[Δ;2]). Videre fremgår det om Δ Inkl P at de logiske aksiomene i L;= er blandt de logiske aksiomene i L;e som i sin tur er blandt de logiske aksiomene i L;e[Δ]. I symboler kan disse to setningene formuleres slik:

LAx(L;e) Inkl LAx(L;e[Δ]) & LAx(L;=) Inkl LAx(L;e)

Det er nødvendig å gi presise definisjoner av slutningsreglene modus ponens og universell generalisering. Disse to begrepene defineres på den følgende måte:

Anta A, B og C er formler i et første-ordens språket L som hører til familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/. Vi sier da at A kan sluttes fra formlene B og C etter regelen modus ponens dersom og bare dersom det finnes formler d;1,d;2êFm(L) slik at A=d;2, B= (d;1 –> d;2) og C= d;1.

Anta at A,BêFm(L) der L er et første-ordens språk i familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/. Da sier vi at A kan sluttes fra B ved hjelp av slutningsregelen universell generalisering dersom og bare dersom det finnes et variabeltegn x og en formel dêFm(L) slik at A= (Ax)d og B=d. Klassen av alle de tripler av formler <A,B,C> der A,B,C ê Fm(L) og A kan sluttes fra B og C ved hjelp av modus ponens betegnes med "R;1(L)". Klassen av alle de formelpar <A,B> i L der A kan sluttes fra B ved hjelp av slutningsregelen universell generalisering betegnes med "R;2(L)".[7]

§8 Definisjon av begrepet 'første-ordens teori'.

La L være et av språkene i familien <L;=[Δ])/Δ Inkl P/. Med *en første-ordens teori i L* forstås et kvadruppel (4-tuple) som oppfyller de følgende krav: (i) Den første komponenten i kvadruplet er klassen av de logiske aksiomene i L, mao. LAx(L). (ii) Den andre komponenten i kvadruplet er en mengde av lukkede formler i L. Det er å bemerke at denne formelmengden ikke nødvendigvis behøver å være ikke-tom. Denne andre komponenten kalles *de ikke-logiske aksiomene* i teorien. (iii) Den tredje komponenten er en to-elementet mengde som inneholder nøyaktig de to slutningsreglene modus ponens og universell generalisering i L, dette innebærer at denne tredje komponenten rett og slett er {R;1(L), R;2(L)}. (iv) Den fjerde komponenten i kvadruplet er den minste formelmengden i L som inneholder alle de logiske aksiomene i L og alle de ikke-logiske aksiomene i teorien, og som dessuten er lukket under slutningsreglene modus ponens og universell generalisering, mao. R;1(L) og R;2(L). Denne komponenten kaller vi for teoremene i første-ordens teorien. Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av hva som forstås med en første-ordens teori i L, der L er et første-ordens språk i den familien vi har innført.

Det er formålstjenelig å innføre endel begreper og notasjon i forbindelse med det begrep 'første-ordens teori' som har blitt innført rett ovenfor. Først bemerkes at hvis T er en første-ordens teori i L betegner vi klassen av de logiske aksiomene i teorien med "LAx(T)". Klassen av de ikke-logiske aksiomene i T betegner vi med "NAx(T)". Klassen av teoremer i teorien T betegnes med "Th(T)".

Det kan videre bemerkes at hvis L er et første-ordens språk og Z er en klasse med formler i L som alle er lukket, dvs. at Z Inkl CFm(L), så er den første-ordens teorien i L som

---

[7] Slutningsreglene modus ponens og universell generalisering er de som vanligvis brukes sammen med de aksiomene som vi har formulert. Det er også de som brukes i Takeuti [1]. (Se side 5 i denne boken). Vårt kvantifikasjonsteoretiske og identitetsteoretiske system avviker noe fra det som fremstilles i det klassiske arbeid Whitehead & Russel [1], eller f.eks. det som gis i Shoenfield [1], side 20 - 23. Men det er velkjent, og forholdsvis enkelt å vise at disse systematiseringene av kvantifikasjonsteorien med identitet er ekvivalente med vårt system.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

har Z som ikke-logiske aksiomer entydig bestemt. Dette er fordi de logiske aksiomene i teorien er entydig bestemt straks man har spesifisert L. Dette gjelder også slutningsreglene i teorien. Men straks man da angir Z, de ikke-logiske aksiomene, vil også den fjerde komponenten være bestemt siden denne er den minste formelmengden i L som innholder de ikke-logiske aksiomene såvel som de logiske aksiomene og som dessuten er lukket under reglene R;1(L) og R;2(L). Men disse komponentene var allerede entydig bestemt i og med at L ble tenkt fiksert.

Anta T er en første-ordens teori i L og at Z Inkl Fm(L). Da brukes uttrykket "T[Z]" for å betegne den første-ordens teorien i L som har som ikke-logiske aksiomer NAx(T)UZ, dvs alle de ikke-logiske aksiomene i T samt formlene i Z. Gitt videre et første-ordens språk L og en formelmengde Z som er inkludert i CFm(L). Den entydig bestemte første-ordens teorien i L som har Z som ikke-logiske aksiomer vil da betegnes med T;L(Z). Som man lett ser fra denne definisjonen har vi at hvis Δ;1 Inkl Δ;2 Inkl CFm(L) der L er et første-ordens språk at det følgende gjelder: Th(T;L(Δ;1)) Inkl Th(T;L(Δ;2)).

I det følgende skal vi legge til grunn det følgende bevisbegrep i forbindelse med første-ordens språk. La L være et første-ordens språk og T en første-ordens teori i L. Med et bevis for formelen A i teorien T forstår vi da en endelig sekvens A;1,....,A;n som oppfyller de følgende krav: (i) A=A;n. (ii) A;1,....,A;n ê Fm(L). De enkelte formler i sekvensen er altså formler i språket L. (iii) For alle naturlige tall jê{1,...,n} gjelder at en av følgende tre ting er tilfelle: (a) A;j er enten et logisk aksiom i L eller et ikke-logisk aksiom i T. (b) Det finnes naturlige tall k,r der k≠r og 1≤ k,r <j og A;j er sluttet fra A;k og A;r ved hjelp av slutningsregelen modus ponens i L. (c) Det finnes et naturlig tall k der 1≤ k <j og A;j er sluttet fra formelen A;k ved hjelp av slutningsregelen universell generalisering i L.

Dermed har har det blitt gitt en helt presis definisjon av hva som forstås med et bevis for en formel i i en første-ordens teori T. Vi sier at A er bevisbar i første-ordens teorien T i L dersom og bare dersom det finnes et bevis for A i teorien T. Vi skriver "Bev(T,A)" som forkortelse for det lengere uttrykket "A er bevisbar i teorien T". Det bemerkes at man lett beviser den følgende sats, nemlig at hvis T er en første-ordens teori i L og AêFm(L) så er A bevisbar i T hvis og bare hvis A er et teorem i T. Klassen av bevisbare formler i en teori faller altså sammen med klassen av teoremer i teorien.

§9 Avgrensning av de kvantifikasjonsteoretiske og identitetsteoretiske sannheter i et førsteordens språk L

Så langt har klassen av første-ordens teorier i et første-ordens språk L blitt avgrenset presist for alle språk i familien <L;=(Δ)>/ Δ Inkl P/. La nå L være et bestemt språk i denne familien. Da betegner vi den første-ordens teorien som ikke har noen ikke-logiske aksiomer i L, dvs. teorien T der NAx(T)=ø med "Q;L".
Th(Q;L) vil altså være klassen av alle de setninger i L som hører med til den rene predikatlogikk utvidet med identitet. Mao. er Th(Q;L) klassen av alle de kvantifikasjonsteoretiske og identitetsteoretiske sannheter i L.[8] Fra de definisjonene vi har gitt

[8] Den påstand som her fremsettes trenger nærmere begrunnelse. Hvis uttrykket "kvantifikasjonsteoretisk og identitetsteoretisk sannhet" betyr "logisk sannhet" vil begrunnelsen for påstanden avhenge av hvordan man definerer "logisk sannhet". Dette gjøres ofte i modell-teoretiske termer. Man definerer først hva man forstår ved en modell (eller struktur) for et første-ordens språk og definerer så hva som forstås med en logisk sannhet i L ved å si at det er en setning i L som er sann i alle mulige modeller for L. Det lar seg da vise at Th(Q;L) inneholder de og bare de setninger i L som er logiske sannheter i denne forstand. Denne sats er det som vanligvis kalles for fullstendighetsteoremet for første-ordens logikk. Modellbegrepet innføres i Shoenfield [1], §2.8. Fullstendighetsteoremet som nå ble nevnt blir bevist i samme bok i §4.2. Endel viktige satser i modellteorien gjennomgås og bevises i Shoenfields bok i kapittel 4. Når det gjelder fullstendighetsteoremet for

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

i forrige paragraf fremgår det at Q;L og T;L(ø) er den samme teori. Videre er det klart at hvis Δ Inkl CFm(L) så er

Th(Q;L) Inkl Th(T;L(Δ))

mao. er alle de rene kvantifikasjonsteoretiske og identitetsteoretiske sannheter i L teoremer i enhver første-ordens teori over L.

§10 Det mengdeteoretiske grunnlag.

Vi har nå beskrevet detaljert den logiske basis for de første-ordens teoriene som vi senere vil formulere og undersøke mer detaljert. I denne paragrafen og umiddelbart etterfølgende paragrafer vil vi beskrive det mengdeteoretiske grunnlaget for teoriene. I de følgende avsnitt vil de første-ordens teoriene som omtales være teorier over språkene i familien <L;e[Δ]>/Δ Inkl P/. Vi minner om at hvis L er et språk i denne familien så er alltid "M(x)" og "xêy", mengde-predikatet og medlemskapspredikatet ikke-logiske konstruksjoner i L. I ethvert slikt språk kan man derfor uttrykke meget kompliserte mengdeteoretiske påstander. Det vi nå først vil gjøre er å avgrense de grunnleggende lovene for disse predikatene. Den mengdeteoretiske basis som vil bli beskrevet her er en versjon av Zermelo-Fraenkel systemet for mengdelære. Ved vanlige formuleringer av dette system vil man ofte bare bruke "ê" som et primitivt predikat og videre formulere aksiomene på en slik måte at teorien utelukkende sier noe om mengder, dvs. utelukker eksistensen av såkalte "urindivider". Siden vi ikke på forhånd vil binde oss til den påstand at alt er mengder dvs. at (Ax)M(x) har vi innført predikater som gjør det mulig å tale om entiteter som er ikke-mengder og vi vil formulere vår versjon av ZF-systemet slik at det ikke logisk sett blir uforenelig med den antagelse at det finnes en uendelig ikke-tom mengde av ikke-mengder. Dette synes å være en fornuftig prosedyre dersom man ønsker å anvende mengdeteoretiske begreper og satser utenfor området til den rene matematikk.[9]

§10.1 Avgrensning og definisjon av ZFCu-aksiomene i et første ordens språk L

Anta L er et første-ordens språk i familien <L;e[Δ]>/Δ Inkl P/. Målet er avgrense en mengde med formler Δ' i L, som vi vil betegne med "A-ZFCu(L)", og som vi kaller for "ZFCu-aksiomene i L". Notasjonen "ZFCu" brukes for å antyde at det dreier seg om en variant av Zermelo-Fraenkel systemet, som inneholder utvalgsaksiomet ("C" for "Choice"). Bokstaven "u" er tatt med fordi systemet tillater eksistensen av urindivider. I det følgende gis en fullstendig liste over aksiomene i dette systemet med enkelte korte kommentarer til hvert aksiom.

(10.1.1) Mengdeaksiomet i L er den følgende formel i L:

(Ax)(Ay)(xêy –> M(y)).

---

predikatlogikken kan man forøvrig betrakte Quine[2], Appendix, og Stoll[1], kapittel 9. For en videre innføring i modellteorien, noe som faller utenfor rammen av dette skrift, henvises til Bell & Slomson [1].

9 Quine velger en annen fremgangsmåte. I stedet for å innføre to primitive predikater, slik vi gjør, beholder han bare medlemskapspredikatet og identifiserer individer med objekter som er identiske med sin egen enhetsmengde. Se Quine [1] §4 for en diskusjon av denne teori. Denne prosedyre har visse syntaktiske fordeler, men synes forøvrig å ha et noe kunstig preg. Metoden synes også å passe dårlig sammen med den kumulative oppfatning av mengdebegrepet som legges til grunn her og som umiddelbart virker svært intuitiv og naturlig.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Som man ser sier dette aksiomet at dersom x er et medlem av y så er y en entitet som er en mengde. Formulert på en litt annen måte: For at en entitet y skal ha elementer er det nødvendig at det er en mengde.

(10.1.2) Det neste aksiom er urmengde-aksiomet i L. Dette aksiomet er den følgende formel i språket L:

$$(Ey)(M(y) \& (Ax)(x\hat{e}y <\!\!-\!\!> (\neg M(x))))$$

Denne formelen sier at det finnes en mengde som er slik at alle entiteter som er ikke-mengder er elementer i den og som omvendt er slik at hvis et eller annet er med i denne mengden så er det en ikke-mengde. Aksiomet sier altså at mengden som inneholder ethvert urindivid og bare dem faktisk eksisterer. Man bør merke seg at man fra denne setningen alene ikke kan slutte at det finnes urindivider eller at mengden av urindivider er endelig eller uendelig. Hvis man ønsker en teori som impliserer dette må man legge til nye ikke-logiske aksiomer som sier nøyaktig dette.

(10.1.3) Ekstensjonalitetsaksiomet i L er den følgende formel i L:

$$(Ax)(Ay)((\ M(x) \& M(y) \& (Ez)(z\hat{e}x) \&(Ez)(z\hat{e}y) \& (Az)(z\hat{e}x <\!\!-\!\!> z\hat{e}y)) \ -\!\!> x=y)$$

Dette aksiomet uttrykker at dersom to mengder som inneholder elementer innholder nøyaktig de samme elementer så er mengdene identiske. Det er forenelig med dette aksiom å påstå at at det finnes uendelig mange distinkte mengder som hver ikke inneholder elementer. For å garantere at det bare eksisterer nøyaktig en tom mengde trenger vi et nytt aksiom.

(10.1.4) Nullmengde-aksiomet i L er den følgende formel i L:

$$(Ey)(M(y) \& \neg(Ez)(z\hat{e}y) \& (Aw)(M(w) \&\neg(Ez)(z\hat{e}w). -\!\!> w=y))$$

Aksiomet uttrykker at det finnes en mengde som ikke inneholdet noen elementer og at denne mengden er entydig bestemt. Sammen med ekstensjonalitetsaksiomet impliserer denne setningen at to mengder er identiske om de inneholder akkurat de samme elementene.

(10.1.5) Anta AêFm(L). Vi sier da at A er et utsondringsaksiom i L dersom og bare dersom det finnes en formel B i L der variablene x og y ikke forekommer fri og der det er slik at A er identisk med

$$(Ay)(M(y) -\!\!> (Ex)(M(x) \& (Az)(z\hat{e}x <\!\!-\!\!> (z\hat{e}y \& B))))$$

Aksiomet uttrykker at dersom y er en eller annen mengde så finnes alltid den delmengden av y som inneholder nøyaktig de elementene i y som oppfyller den åpne setningen B. Er B en lukket formel som ikke inneholder noen fri variabeltegn i det hele tatt vil denne delmengden enten falle sammen med y i det tilfelle at B er sann eller være identisk med nullmengden om B er usann. Forøvrig kan B være en formel i L som inneholder alle mulige andre variabeltegn enn x og y som fri variabler. Det bør også bemerkes i denne forbindelse at vi her ikke bare har angitt en enkelt formel i L, men hel klasse av formler, nemlig alle de formler som er utsondringsaksiomer i L.

(10.1.6) Parmengdeaksiomet i L er den følgende formel i i L:

$$(Ay)(Az)(Ex)(M(x) \&(Aw)(w\hat{e}x <\!\!-\!\!> (w=y \vee w=z)))$$

Aksiomet utrykker at dersom y og z er to vilkårlige entiteter så finnes det en mengde som inneholder nøyaktig disse to entitetene og ingen andre.

(10.1.7) Foreningsmengde-aksiomet i L er den følgende formel:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) &(Az)(zêx <–> (Ew)(zêw & wêy))))

Denne setningen uttrykker at dersom y er en mengde så finnes mengden som inneholder nøyaktig de og bare de objekter som er elementer i et eller annet element i mengden y. Er alle elementene i y ikke-mengder ser man forholdsvis lett at denne foreningsmengden er nullmengden. Er noen elementer i y ikke-mengder, men ikke alle, vil foreningsmengden være foreningsmengden til den delmengden av y som bare inneholder mengder.

(10.1.8) Potensmengde-aksiomet i L er denne formelen i L:

(Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (M(z) & (Aw)(wêz –>wêy)))))

Aksiomet uttrykker at dersom y er en mengde så finnes mengden som inneholder nøyaktig alle delmengder av y. Denne mengden kalles potensmengden til y.

(10.1.9) Uendelighetsaksiomet i L er den følgende formel i L:

(Ex)(M(x) & (Ay)((M(y) &¬(Ex)(xêy)) –> yêx) &
(Az)((zêx &M(z)) –> (Ew)(M(w) &wêx & (Ar)(rêw <–> r=z))))

Dette aksiomet sier at det finnes en mengde x som for det første inneholder nullmengden, dvs. (Ay)(M(y) &¬(Ex)(xêy)) , og som dessuten alltid inneholder enhetsmengden til enhver mengde den inneholder. I symboler kan dette uttrykkes slik:

(Az)((zêx &M(z)) –> (Ew)(M(w) &wêx & (Ar)(rêw <–> r=z)))

Betegner "ø" nullmengden og "{x}" enhetsmengden til objektet x, dvs. den mengden som inneholder objektet x og intet annet objekt, så sier aksiomet at det finnes en mengde som inneholder ø, {ø}, {{ø}}, ... osv. ad inf. Siden denne mengden inneholder uendelig mange elementer kalles mengden for uendelighetsaksiomet.

(10.1.10) A er et replacementakiom i L dersom og bare dersom det følgende er tilfelle: Det finnes en formel B(x,y) med fri variabler x og y , som videre er slik at variablene w og w' ikke forekommer fri i den og hvor vi har at A er identisk med formelen:

((Ax)(Ay)(Az)(B(x,y) &B(x,z) –> y=z) &M(w)) –>
(Ew')(M(w') & (Ax)(xêw' <–> (Ey)(yêw & B(y,x))))

Aksiomet kalles for replacementaksiomet eller substitusjonsaksiomet fordi det sier at dersom w er en mengde så finnes den mengden man får når man erstatter elementene i w med nye elementer som er tilordnet de gamle i kraft av en på forhånd gitt funksjon.

Det gjenstår nå bare å omtale to aksiomer. Det første er det såkalte Fundierungsakiomet. Det andre er utvalgsakiomet.

(10.1.11) Fundierungsakiomet i L er den følgende formel i L:

(M(x) & (Ew)(wêx)) –>(Ey)(yêx & ¬(Ez)(zêy & zêx))

Dette aksiomet forbyr eksistensen av en mengde x der det finnes en uendelig kjede <y;k>/kêN/ av elementer i x slik at y;k+1 ê y;k. Mao. er det slik at aksiomet forbyr eksistensen av uendelig nedadstigende ê-kjeder.

(10.1.12) Utvalgsaksiomet er den følgende formel i L:

[M(x) & (Ay)(yêx –> (M(y) & (Ez)(zêy))) &
(Az)(Ay)(y,zêx & y≠z –> ¬(Ew)(wêy &wêz))] –>
(Ez)(M(z) & (Ay)(yêx –> (Er)(rêy &rêz &(At)((têy &têz) –> t=r))))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Denne formelen er skrevet i primitiv notasjon og man må ha noe tålmodighet ved lesningen av den. Det aksiomet uttrykker er at hvis x er en mengde av innbyrdes disjunkte og ikke-tomme mengder så finnes det en mengde z som har nøyaktig et og bare et element tilfelles med hver av mengdene i familien x.

Dette avslutter vår gjennomgåelse av de mengdeteoretiske aksiomene vi vil benytte.

§10.2 Definisjon av uttrykket "ZFCu-aksiom i L".

Anta L er et språk i familien <L;e[Δ]>/Δ Inkl P/ og at AêFm(L). Vi sier da at A er et ZFCu-aksiom i L hvis og bare hvis det enten er slik at A er mengde-aksiomet, urmengde-aksiomet,ekstensjonalitetsaksiomet, nullmengdeaksiomet, parmengde-aksiomet, foreningsmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, uendelighetsaksiomet, funderingsaksiomet eller utvalgsaksiomet i L, eller det er slik at A er et utsondringsaksiom i L eller et replacementaksiom i L.

Vi betegner klassen av alle ZFCu-aksiomer i L med "A-ZFCu(L)". Den første-ordens teorien i L som har som ikke-logiske aksiomer aksiomene i klassen A-ZFCu(L) betegner vi med "ZFCu(L)". Er Z Inkl Fm(L) betegner vi den teorien vi får når formlene i Z legges til de ikke-logiske aksiomene i teorien ZFCu(L) som ytterligere ikke-logiske aksiomer med "ZFCu(L)[Z]". [10]

Vi har nå beskrevet det mengdeteoretiske grunnlag for de teorier vi i senere arbeider vil studere. Det neste emnet vi vil behandle er bestemte beskrivelser og mengdeabstraksjonstermer. Dette vil skje i de neste paragrafene.

§11 Bestemte beskrivelser og mengdeabstraksjonstermer.

Ser man på språkene i familien <L;e[Δ]>/Δ Inkl P/, eventuelt på dem i familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/, ser man at ingen av disse språkene inneholder noen konstruksjoner som kan brukes til å danne bestemte beskrivelser eller mengde-abstraksjonstermer. Vi vil nå innføre to slike konstruksjoner over klassen E av uttrykk.

De to konstruksjonene som innføres er (1) "Det objektet x som er slik at A", en konstruksjon vi forkorter med "(ix)A", og (2) "Mengden av alle de objekter x som er slik at A". Denne konstruksjonen forkortes med "Mg(x: A)". Hvis vi nå tar ut et vilkårlig språk i familien <L;=(Δ)>/Δ Inkl P/, la oss kalle det L, og utvider det logiske vokubularet med konstruksjonene (1) og (2) får vi et litt rikere språk, La oss kalle det "L;b". Imidlertid må man utvide reglene for dannelsen av formler som vi ga i §3 pkt. (v), med noen nye regler siden vi nå i tillegg til formlene i L også må ta i betraktning de termer som kan dannes i L;b. De nye reglene som vil bli benyttet kan formuleres slik:

La L være et språk i familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/, da er formlene og termene i språket L;b de og bare de uttrykk som kan vises å være det ved hjelp av de følgende regler:

---

[10] En mer detaljert omtale av aksiomene i ZFC, og en mer detaljert begrunnelse for dem, gis i Drake [1], kapittel 1. Det skisseres der hvorfor aksiomene holder i den kumulative type-struktur. En lignende motivering for de vanlige ZFC-aksiomene gis i Shoenfield [1], kapittel 9, §9.1. Det bør også nevnes at en fyldig gjennomgåelse av aksiomene finnes i Stoll [1], kapittel 7. Hva som er det beste grunnlaget for mengdelæren kan vel ennå ikke sies å være avgjort. For vår egen del anser vi det mengdebegrep som er gitt ved den kumulative typestrukturen som svært naturlig og har derfor valgt å arbeide med det. Vårt valg er imidlertid av en provisorisk karakter. Vi henviser til Quine [1], Del III for en detaljert fremstilling og sammenligning av endel av de viktigste mengdeteoretiske systemene som har blitt foreslått. Forøvrig henvises til Quine [1],[3], Stoll [1] og Takeuti [1] for dem som ønsker en innføring i mengdelæren.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

R1 Er F en predikatkonstruksjon av grad n i L og t;1, ...,t;n termer i L så er F(t;1,...,t;n) en formel i L;b
R2 Er A,B to formler i L;b og er x et variabeltegn i L;b så er følgende uttrykk formler i L;b: (AvB), (A&B), (¬A), (A–>B), (A<–>B), (Ax)A og (Ex)A.
R3 Er x,y to variabeltegn i L;b så er (x=y) en formel i språket L;b
R4 Er x et variabeltegn i L;b og A en formel i L;b så er x, (ix)A og Mg(x: A) termer i språket L;b

Man ser nå straks at om man velger ut et språk i familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/ så er L;b entydig bestemt. Videre ser man lett ved induksjon på lengden av formler i L at Fm(L) Inkl Fm(L;b). Vi kaller termer av typen "(ix)A" for bestemte beskrivelser. Termer av typen "Mg(x: A)" kalles her for mengdeabstrak-sjonstermer. Man skulle forholdsvis lett se at de formlene som er med i Fm(L;b) - Fm(L) er de formlene som inneholder minst en forekomst av enten en bestemt beskrivelse eller av en mengdeabstraksjonsterm.

§11.1 Eleminering av bestemte beskrivelser og mengdeabstraksjonstermer. Regler for hvordan formlene i L:b kan oversettes til dem i L.

I §7 avgrenset vi klassen av logiske aksiomer i L, LAx(L) når L var et språk i familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/. Disse aksiomene var aksiomer for de logiske konstruksjonene i L. Vi kunne nå gjøre det samme for L;b og dermed legge til nye aksiomer for konstruksjonene (1) og (2) i §11. Imidlertid vil vi ikke velge denne fremgangsmåten. I stedet vil det bli gitt visse regler for hvordan formlene i L;b som inneholder bestemte beskrivelser og mengdeabstraksjonstermer kan omformes til formler i L. Disse reglene vil være formulert slik at de yter rettferdighet til den intuitive betydningen til disse to konstruksjonene. På denne måten vil L;b fungere som et hjelpespråk vi nytter for å kunne uttrykke kompliserte tanker og sammenhenger i L, mens L har status av å være det "offisielle" språk. Vi innfører altså ikke den bestemte beskrivelses-konstruk-sjonen og mengdeabstraksjons-konstruksjonen som primitive udefinerte kon-struksjoner, men ved et system av kontekstuelle definisjoner.

§11.2 Regel for eliminering av bestemte beskrivelser.

Vi antar nå at L er et språk i familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/ og betrakter utvidelsen L;b. Anta A er en formel i L;b og at t er en bestemt beskrivelse. Dette innebærer at t=(ix)B der x er et eller annet variabeltegn og B er en formel i L;b. Anta at t forekommer i A. Fra reglene R1 - R4 som ble gitt i § 11 fremgår det da at t alltid vil forekomme i en delformel av typen F(t;1,....,t;n) der F er et n-ært predikat og t;1,...,t;n er termer. La oss anta at t=t;j for noe j der $1 \leq j \leq n$. Vi eliminerer da denne forekomsten av t ved å erstatte delformelen Ft;1....t;n med formelen:

(Ey)(F(t;1,..,t;(j-1),y,t;(j+1),...,t;n) &(Ax)(B <–> x=y))

Her velger vi variabelen y slik at det er den første variabelen i den alfabetiske ordningen av variabeltegnene som ikke forekommer i F(t;1,...,t;n). La oss kalle den formelen som vi får når denne erstatningen gjøres i A for A'. Regelen for elimininering av beskrivelsestermer kan nå formuleres slik: La AêFm(L;b) være gitt. Vi oppsøker den første forekomsten av en beskrivelsesterm fra venstre i formelen. Vi eliminerer så denne på måten beskrevet ovenfor og får som resultat formelen A'. Denne vil inneholde n-1 forekomster av operatoren i om A inneholder n forekomster. Vi oppsøker så den første forekomsten av en bestemt beskrivelse i A'. Denne elimineres så på måten beskrevet ovenfor og vi får som resultat A". Vi fortsetter

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

så denne prosedyren inntil vi ender opp med en formel som ikke inneholder noen forekomster av beskrivelsestermer. Merk at denne prosedyren er entydig og at den alltid stopper opp etter et endelig antall trinn siden enhver formel i L;b bare inneholder et endelig antall forekomster av beskrivelseskonstruksjonen.

§11.3 Regel for eliminering av mengdeabstraksjonstermer.

Igjen forutsettes det at L er et språk i familien <L;e[Δ]>/Δ Inkl P/. Videre tenker vi oss at A er en vilkårlig formel i L;b. La det også være gitt at A ikke inneholder noen bestemte beskrivelser, mao. at disse først har blitt fjernet i overen-stemmelse med prosedyren beskrevet i §11.2. Vi antar at t=Mg(x: B) der B er en formel i L;b og x er et variabeltegn. Anta at termen t forekommer i A. I lys av reglene R1 - R4 i §11 er det da tre muligheter: (a) t forekommer i en delformel av typen F(t;1,...,t;n) og t=t;j for noe j der 1≤j≤n og hvor F er et n-ært predikat som er forskjellig fra identitetspredkatet og medlemskapspredikatet. (b) t forekommer i en formel av typen t;1=t;2 hvor t;1 og t;2 er termer og hvor man har at t=t;1 eller t =t;2. (c) t forekommer i en formel av typen t;1êt;2 og t er enten identisk med t;1 eller med t;2.

Disse tre tilfellene studeres i den rekkefølgen de har blitt omtalt.

Tilfelle (a). I dette tilfellet erstatter vi delformelen F(t;1,...,t;n) med formelen:

(Ey)(F(t;1,...,t;(j-1),y,t;(j+1),...,t;n) &M(y) & (Ax)(xêy <–> B))

i det vi lar y være den første variabelen som ikke forekommer i F(t;1,...,t;n).

Tilfelle (b). Vi må her sondre mellom to undertilfelle ettersom t=t;1 eller t=t;2 Tilfelle (b1) . Anta t=t;1. Da er det igjen to muligheter når det gjelder t;2: (b1.1) t;2=x' for et eller annet variabeltegn x'. I så tilfelle erstatter vi t;1=t;2 med formelen M(x') & (Ay)(yêx' <–> B;x[y]). (b1.2) t;2= Mg(y: C) hvor y er et variabeltegn og C er en formel i L;b. I så tilfelle erstatter vi t;1=t;2 med formelen (Az)(B;x[z] <–> C;y[z]) der z er den første variabelen som ikke forekommer i t;1=t;2. Tilfelle (b2). t=t;2. Igjen må vi sondre mellom to undertilfelle når det gjelder t;1: (b2.1) t;1=x' for noe variabeltegn x'. I så fall erstatter vi t;1=t;2 med M(x') & (Ay)(yêx' <–> B;x[y]) der y er det første variabeltegnet som ikke forekommer i t;1=t;2. (b2.2) t;1 = Mg(y: C) der y er et variabeltegn og C en formel i L;b. Da erstatter vi t;1=t;2 med (Az)(B;x[z] <–> C;y[z]) der z igjen er den første variabelen som ikke forekommer i t;1 = t;2.

Tilfelle (c). Også her må vi skille mellom to undertilfelle ettersom t=t;1 eller t=t;2. Tilfelle (c1). t=t;1. Da erstatter vi t;1êt;2 med :

(Ey)(M(y) & (Ax)(xêy <–> B) & yêt;2)

der y er det første variabeltegnet i den alfabetiske ordningen som ikke forekommer i t;1êt;2. Tilfelle (c2). t=t;2. Det er da igjen to muligheter når det gjelder t;1. (c2.1) t;1=y der y er et variabeltegn. I så tilfelle erstattes t;1êt;2 med B;x[y]. (c2.2) t;1= Mg(y: C) der y er et variabeltegn og C en formel i L;b. I så tilfelle erstatter vi t;1êt;2 med (Ez)(M(z) & (Ay)(yêz <–> C) & B;x[z]) der z er den første variabelen som ikke forekommer i t;1êt;2.

Dermed har det blitt angitt hvordan en term t kan fjernes i alle typer kontekster hvor den kan forekomme. Starter man altså med en formel A i L;b fjernes mengde-abstraksjonstermene slik: Man søker opp den første forekomsten av en mengde-abstraksjonsterm fra venstre i A. Denne elimineres så etter reglene beskrevet ovenfor. Resultatet blir en formel A' som inneholder en forekomst mindre av mengdeabstraksjonskonstruksjonen. Man gjentar så

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

prosedyren med A' og får som resultat A". Siden enhver formel bare inneholder et endelig antall forekomster av mengdeabstraksjons-konstruksjonen vil prosedyren stanse opp etter et endelig antall trinn. Den formelen man da har kommet frem til vil være en formel i L så sant man på forhånd har startet med en formel A hvor alle de bestemte beskrivelsene er fjernet etter den prosedyre som ble beskrevet i §11.2. Man bør også bemerke at denne prosedyren for eliminering av mengdeabstrak-sjonstermer alltid gir et entydig resultat. Dette er fordi valget av nye variabler som introduseres alltid vil være entydig bestemt. (Se i denne forbindelse f.eks. forbeholdet angående variabelen y som er gjort i forbindelse med tilfelle (a) ovenfor.)

Selvom vi nå har angitt hvordan bestemte beskrivelser og mengdeabstrak-sjonstermer skal fjernes fra våre formler vil det likevel fortsatt være ytterst beleilig å bruke dem. Det er svært formålstjenlig fordi vi til stadighet ønsker å si slike ting som at det og det objekt har de og de egenskaper, videre om den og den mengden som oppfyller visse krav vi angir at den har bestemte egenskaper, osv. Dessuten vil vi straks introdusere en rekke mengdeteoretiske begreper som vil bli brukt svært meget. Disse begrepene kan ikke så lett defineres uten at disse to typer av termer står til disposisjon.

§12 Elementære mengdeteoretiske begreper. Innledning.

Vi ha så langt gitt en detaljert beskrivelse av språkene i den språkfamilien vi vil gjøre til gjenstand for undersøkelse og beskrevet de språk som vi hovedsakelig kommer til å arbeide med. Dernest har vi angitt det logiske og mengdeteoretiske grunnlag for de teorier vi senere vil komme til å omtale i det vi for hvert språk L i familien <L;e[Δ]>/Δ Inkl P/ har beskrevet de logiske aksiomene i L og klassen av de mengdeteoretiske aksiomene, ZFCu-aksiomene i L. Tilslutt har vi i detalj vist hvordan vi kontekstuelt definerer bestemte beskrivelse og mengdeabstrak-sjonstermer. Det vi nå vil gjøre er å gi en oversikt over alle de mengdeteoretiske begrepene vi hyppig vil bruke utover i våre arbeider. Dette vil bli gjort ved å gi en detaljert oversikt over hvordan de er definert. Dette gjøres for at leseren ikke skal sveve i villrede over nøyaktig hvordan vi bruker sentrale mengdeteoretiske termer og med hvilken betydning vi bruker dem.

§13 Elementære mengdeteoretiske begreper.[11]

I det følgende brukes x,y,z,... som metaspråkelige variabler for variabeltegn. Når det gjelder t;1,t;2, t;3, ... brukes disse som metaspråklige variabler for termer generelt. Store latinske bokstaver A,B,C, ... brukes som variabler for formler og små bokstaver a,b,c, ... skal brukes som variabler av metaspråkelig art for mengdeabstraksjonstermer.

Snittet og unionen av to mengder a og b defineres ved :

(1) aΩb = Mg(x: xêa & xêb)

(2) aUb = Mg(x: xêa v xêb)

Vi gjør oppmerksom på at vi av og til kan komme til å bruke uttrykket "Kn(a,b)" i stedet for "aΩb" og uttrykket "Un(a,b)" istedet for "aUb". Når det gjelder uendelig union og snitt defineres disse operasjonen på den følgende måte:

(3) UN(a) = Mg(x: (Ey)(xêy & yêa))

(4) SN(a) = Mg(x: (Ay)(yea –> xêy))

Uttrykket "UN(a)" leses "Unionen av alle mengdene i mengden a". Uttrykket "SN(a)" leses "Snittet av alle mengdene i mengden a".

[11] Definisjonene i dette avsnittet er helt standard og er i hovedsak identiske med dem som er gitt i Takeuti [1], kapittel 5. En nærmere motivering av dem skulle derfor være overflødig.

Begrepene potensmengden til a, mengdeinklusjon, nullmengde og den universelle mengden innføres ved de følgende definisjoner:

(5) a Inkl b <–> (Ax)(xêa –> xêb)
(6) Pt(a) = Mg(z : M(z) & z Inkl a)
(7) ø = Mg(z: z≠z)
(8) V = Mg(z: z=z)

Komplementet til en mengde a betegner vi med "c(a)" eller, dersom misforståelser ikke kan oppstå ved "-a". Differansen mellom to mengder a og b betegner vi med "a-b". Disse uttrykk defineres slik:

(9) c(a) = Mg(x: ¬(xêa))
(10) a-b = Mg(x: xêa &¬(xêb))

I forbindelse med disse fire definisjonene bemerkes at "a Inkl b" leses "Mengden a er inkludert i mengden b", "Pt(a)" leses "Potensmengden til a" eller "Mengden av alle delmengder av a". Videre nevnes at uttrykket "ø" leses "nullmengden" og endelig at uttrykket "V" leses som "Allmengden" eller som "Den universelle mengden". At a er strengt inkludert i b, vi benytter forkortelsen "a SInkl b" er definert slik:

(11) a SInkl b <–> (a Inkl b & ¬(b Inkl a))

Enhetsmengden som inneholder x, {x}, og den uordnete parmengden som inneholder elementene x og y, {x,y} defineres slik:

(12) {x} = Mg(y: y=x)
(13) {x,y} = Mg(z: z=x v z=y)

Begrepet 'ordnet par' er av grunnleggende betydning for våre definisjoner av uttrykkene "a er en funksjon" og "a er en relasjon". Det ordnete par med x som første komponent og y som den annen komponent, <x,y>, defineres slik:

(14) <x,y>={{x},{x,y}}

Vi definerer det kartesiske produkt av mengden a og mengden b, i symboler "Prod(a,b)" ved :

(15) Prod(a,b) = Mg(z: (Ex)(Ey)(xêa & yêb & z=<x,y>))

En mer vanlig notasjon i forbindelse med det kartetiske produkt av mengdene a og b er "aXb". I sammenhenger hvor misforståelser ikke kan oppstå vil vi også benytte oss av denne notasjon. Det bør nevnes at vi bruker uttrykket

"Mg(<x,y>: A)"

som forkortelse for det lengere uttrykket:

"Mg(z: (Ex)(Ey)(z=<x,y> &A)

Det ordnete n+1 tuplet av objektene x;1,...,x;(n+1), <x;1,....,x;(n+1)>, innføres ved den følgende definisjon:

(16) <x;1, ... ,x;(n+1)> =<<x;1, ... ,x;n>,x;(n+1)>

Videre innføres det n-ære kartesiske produkt over a, eller det som også kalles det n-ære krysproduktet over a, – vi skal i denne forbindelse bruke uttrykket "C(a,n)", ved:

(17) C(a,n+1) =Prod(C(a,n),a)

§14 Relasjons - og funksjonsbegrepet. [12]

Vi definerer uttrykket "f er en relasjon", i symboler "Rel(f)" ved:

(1) Rel(f) <–> (Ax)(xêf –> (Ey)(Ez)(x=<y,z>))

[12] Også definisjonene av de følgende begreper er standardpreget. Merk imidlertid at vår definisjon av F‘x avviker fra den som er gitt i Takeuti [1], kapittel 6, Definisjon 6.10. Vi har formulert definisjonen slik vi har gjort det fordi vi tillater eksistensen av urindivider i vårt mengdeteoretiske system.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Uttrykkene "f er en funksjon", "Domenet til funksjonen f" og "Verdiområdet til funksjonen f", i symboler henholdsvis "Func(f)", "Dom(f)" og "Rgn(f)", defineres slik:

(2) Func(f) <–> (Rel(f) & (Ax)(Ay)(Az)((<x,y>êf & <x,z>êf) –> y=z))

(3) Dom(f) = Mg(x: (Ey)(<x,y>êf))

(4) Rgn(f) = Mg(x: (Ey)(<y,x>êf))

Uttrykkene "Omvendingen til relasjonen f" og "f er en korrelasjon", i symboler "f;-1" og "Cor(f)" defineres på den følgende måte:

(5) f;-1 = Mg(<y,x>: <x,y>êf)

(6) Cor(f) <–> Func(f) & Func(f;-1)

De neste begrepene som introduseres er svært nyttige:

(7) f: a –>b <–> (Func(f) & Dom(f)=a & Rgn(f) Inkl b)

(8) f: a-(1-1)->b <–> (Cor(f) & Dom(f)=a & Rgn(f) Inkl b)

(9) f: a- på -> b <–> (Func(f) & Dom(f)=a &Rgn(f)=b)

(10) f: a- (1-1,på) -> b <–> (Cor(f) & Dom(f)=a & Rgn(f)=b)

Uttrykket "f: a –>b" leses "f er en funksjon fra mengden a inn i mengden b", uttrykket "f: a-(1-1)-> b" leses "f er en-en-tydig funksjon fra mengden a inn i mengden b". Videre leses uttrykket "f: a- på -> b" som "f er en avbildning av mengden a på mengden b". Endelig leses "f: a- (1-1,på) -> b" som "f er en en-en tydig avbildning av mengden a på mengden b".

Den neste definisjonen er av logisk og ikke rent mengdeteoretisk natur. Uttrykket "(E! x)A" – som leses "Det finnes nøyaktig ett objekt som er slik at A" – defineres slik:

(11) (E!x)A <–> ((Ex)A & (Ay)(Az)(A;x[y] & A;x[z] -> y=z))

Vi innfører termen "Verdien til funksjonen f for argumentverdien x" – som vi i symboler skriver "f`x" – ved den følgende definisjon:

(12) f`x = (iy)(((E!z)(<x,z>êf & y =(iz)(<x,z>êf)) v (y=ø &¬(E!z)(<x,z>êf)))

Denne definisjonen innebærer at dersom det finnes et entydig bestemt objekt z slik at <x,z>êf så er f`x dette objektet. I motsatt fall setter vi f`x=ø. Dette innebærer at f`x er definert uansett hva x er. I stedet for skrivemåten "f`x" vil vi også svært ofte benytte skrivemåten "f(x)" når f er en funksjon og det fra sammenhengen fremgår at det ikke kan være tvil om hva som menes.

Vi innfører restriksjonen av funksjonen f til mengden a, Rest(f,a), ved:

(13) Rest(f,a) = fΩ(Prod(a,V))

Er f en funksjon betegner "f"a" bildet av mengden a over funksjonen f. Dette er definert slik:

(14) f"a = Mg(y: (Ex)(xêa & <x,y>êf))

Vi definerer "Sammensetningen av funksjonen f og funksjonen g", i symboler "f|g" ved:

(15) f|g = Mg(<x,y> : (Ez)(<x,z>êf & <z,y>êg))

Klassen av alle funksjoner med mengden a som domene og med verdiområdet inkludert i mengden b betegner vi med "Exp(b,a)". Den formelle definisjonen av dette uttrykket kan formuleres slik:

(16) Exp(b,a) = Mg(f: Func(f) & Dom(f)=a & Rgn(f) Inkl b)

De tre første tallene i ordinaltallsrekken til von Neumann defineres slik:

(17) 0=ø 1={ø} 2={ø,{ø}}

Den karakteristiske funksjonen til mengden a med hensyn på området b betegner vi med "a`(b,k)" og vi definerer dette uttrykket på den følgende måte:

(18) a`(b,k) = (if)(Func(f) & Dom(f)=b & Rgn(f) ={0,1} &
(Ay)(yêaΩb -> f(y)=1) & (Ay)(yê(b-a) -> f(y)=0))

Vi definerer "Mengden karakterisert ved den karakteristiske funksjonen f over området b", i symboler "f`(b,-k)" ved:

(19) f`(b,-k) = Mg(y: yêb & f(y)=1)

Anta nå at t er en term. Da definerer vi uttrykket "(dx)(t)", som leses "den funksjonen som til ethvert x tilordner objektet t", ved:

(20) (dx)(t) = Mg(<x,y>: y=t)

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Videre setter vi:

(21) (dxêa)(t) = Mg(<x,y>: xêa & y=t)

Det bør nevnes at d er Church lambda-abstraksjonsoperator. Vi innfører også uttrykket "<f(x)>/xêa/" ved den følgende definisjon:

(22) <f(x)>/xêa/ = Mg(z: (Ex)(xêa & z= <x,f(x)>)

Uttrykket"<f(x)>/xêa/" kan forholdsvis suggestivt leses slik: "Mengdefamilien bestemt av funksjonen f ettersom x gjennomløper mengden a".

Kryssproduktet av mengdene i familien f(x) ettersom x gjennomløper mengden a betegner vi med "Prod/xêa/(f(x))" og definerer dette slik:

(23) Prod/xêa/(f(x)) = Mg(g : Func(g) & Dom(g)=a & (Az)(zêa –> g(z)êf(z))

Vi definerer "Snittet av alle mengdene i familien f(x) ettersom x gjennomløper mengden a", SN/xêa/(f(x)), ved:

(24) SN/xêa/(f(x)) = Mg(y: (Az)(zêa –> yêf(z)))

Videre definerer vi "Unionen av alle mengdene i familien f(x) ettersom x gjennomløper mengden a", i symboler "UN/xêa/(f(x))" ved:

(25) UN/xêa/(f(x)) = Mg(y: (Ex)(xêa & yêf(x)))

At x er en mengde som er likemektig med mengden y defineres slik:

(26) x≈y <–> (Ef)(f: x –(1-1,på) –>y)

Videre definerer vi predikatene "x er en mengde med mindre mektighet enn y", "x«y" ,og "x er en mengde som er mindre eller likemektig med y", i symboler "x«=y", ved:

(27) x«=y <–> (Ef)(f: y –(på)–>x)

(28) x«y <–> ((x«=y) & ¬(x≈y))

Med definisjonene (1) - (28) skulle vi ha laget en forholdsvis fullstendig liste over definisjonene av de viktigste begrepene i forbindelse med funksjoner og relasjoner som vi trenger.

§15 Ordinaltall og kardinaltall

I tillegg til de mer elementære mengdeteoretiske begrepene som vi har innført i §13 og §14 trengs også en rekke begreper som gjør en i stand til å omtale rekken av ordinaltall og kardinaltall. I denne paragrafen skal det bli gitt et kort resyme av de definisjonene som er nødvendige. [13]

Vi definerer begrepene " R er en fundert relasjon over mengden a", i symboler "R Fr a","R er en velordning over mengden a", i symboler "R We a", "R er en velfundert relasjon over mengden a", i symboler "R WFr a", og "R er en velfundert velordning over mengden a", i symboler "R Wfwe a" ved de følgende definisjoner:

(1) R Fr a <–> (Ax)((M(x) & x Inkl a & x≠ø) –>
(Ey)(yêx & xΩ((R;-1)"{y}) =ø)

(2) R WFr a <–> R Fr a & (Ax)(xêa –> M(aΩ ((R;-1)"{x})))

(3) R We a <–> R Fr a &(Ax)(Ay)(xêa &yêa –>
<x,y>êa v x=y v >y,x>êa)

13 Definisjonene i dette avsnittet er tall rike. De bør naturligvis motiveres mer detaljert, men det faller egentlig utenfor rammen av dette arbeid. For en mer detaljert begrunnelse henviser vi derfor til Takeuti [1], kapittel 7 og 8. Den versjon av ordinaltallene og kardinaltallene som benyttes her, og som forøvrig passer best med ZFC, er von Neumanns ordinaltallsrekke. Men dette er ikke den eneste muligheten. I Quine [1], kapittel VII og VIII drøftes forskjellige mulige måter å definere ordinaltall og kardinaltall på. I denne forbindelse henviser vi også til kapittel 2 i Stoll [1].

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(4) R Wfwe a <–> (R WFr a & R We a)

At R er en fundert relasjon over a innebærer at enhver ikke-tom delmengde av a inneholder et R-minimalt element. At R er en velfundert relasjon over a innebærer at R er fundert over a og at ethvert R-initialt segment av a, dvs. de diverse aΩ((R;-1)"{x} for xêa er mengder. At R er en velordning over a betyr at R er en fundert relasjon over a og at R er sammenhengende over a. Tilslutt innebærer det at R er en velfundert velordning over a at R er velfundert over a og samtidig er en velordning over a.

Medlemskaps-relasjonen E defineres på den følgende måte:

(5) E = Mg(<x,y>: xêy)

Når det gjelder uttrykket "a er en transitiv mengde", "Tr(a)" og uttrykket "a er et ordinaltall", "Ord(a)" defineres disse ved:

(6) Tr(a) <–> (Ax)(Ay)(xêy & yêa. –> xêa)

(7) Ord(a) <–> E We a & Tr(a) & M(a) & (Ax)(xêa –> M(x))

Man ser, om man studerer (7), at et ordinaltall er en transitiv mengde som velordnes av medlemskapsrelasjonen. Klassen av ordinaltall, On, defineres slik:

(8) On= Mg(x: Ord(x))

Uttrykkene "x er mindre enn y", i symboler "x<y", og "x er mindre eller lik y", "x≤y" mellom ordinaltall defineres på den følgende måte:

(9) x<y <–> xêy

(10) x≤y <–> (xêy v x=y)

Videre defineres *w* , klassen av endelige ordinaltall, klassen av etterfølger-ordinaltall, K;I, klassen av limes-ordinaltall, K;II, samt etterfølgeren til ordinaltallet x, x+1, slik:

(11) *w* = Mg(a: aU{a} Inkl K;I)

(12) K;I = Mg(a: a=ø v (Eb)(Ord(b) & a=(b+1)))

(13) K;II = On - K;1

(14) x+1 = xU{x}

Den følgende rekke med begreper er også av viktighet i teorien om ordinaltallene. Den minste øvre grensen til mengden a, "Sup(a)", er definert ved:

(15) Sup(a)= Mg(x: xêUN(aΩOn) & aΩOn≠ø)

Den største nedre grensen til mengden a betegnes med "Inf(a)" og defineres slik:

(16) Inf(a) = Mg(x: xêSN(aΩOn) & aΩOn≠ø)

Det største av ordinaltallene x og y. Max(x,y), og det minste ordinaltallet som er slik at A, (μx)A er definert ved:

(17) Max(x,y) = xUy

(18) (μx)A = Inf(Mg(x:A))

For å kunne definere sum, produkt og potensering i forbindelse med ordinaltall trengs visse hjelpebegreper. [14] Først defineres "q(H,z)" slik:

(19) q(H,z) = Mg(<x,y>: (x=ø & y=z) v
(x≠ø & Sup(Dom(x))≠ Dom(x) & y= H(x(Sup(Dom(x))))) v
(x≠ø & Sup(Dom(x)) = Dom(x) & y=UN(Rgn(x))))

Videre defineres "l(g)" slik:

(20) l(g) = UN(Mg(f: (Ex)(Ord(x) & Func(f) & Dom(f)=x &
(Ay)(y<x &Ord(y) –> f(y)=g(Rest(f,y))))))

Gitt disse definisjonene kan man så definere summen av to ordinaltall x, y ved:

(21) H;1= Mg(<x,x+1>: xêOn)

(22) x+y = l(q(H;1,x))‘y

---

[14] I forbindelse med definisjon (19) - (26) bør man konsultere Takeuti [1], og særlig se på teoremene 7.40 til 7.56 i kapittel 7, samt definisjonene 8.1, 8.15 og 8.30 i kapittel 8 i denne bok. Vårt formål her er utelukkende å vise hvordan vi i prinsippet kan definere sum og produkt mellom ordinaltall. Strengt tatt er det ikke meningen å gi en utførlig bakgrunn for disse definisjonene.

Videre kan vi gi en rigorøs definisjon av produktet av to ordinaltall, xy, på den følgende måte:

(23) H;2(x) = Mg(<y,y+x>: yêOn)

(24) xy = l(q(H;2(x),ø))‘y

Tilslutt kan også uttrykket "x opphøyd i y'te potens", i symboler skrives dette "x^y", defineres ved:

(25) H;3(x) = Mg(<y,yx>: yêOn)

(26) x^y = l(q(H;3(x),1))‘y

Vi har nå innført alle de begrepene som trengs for å kunne formulere og bevise alle de grunnleggende setningene i teorien om ordinaltallene.

Det kan imidlertid være gunstig å formulere definisjoner av de viktigste begrepene innenfor teorien om de endelige og uendelige kardinaltall. [15] Dette skal vi gjøre nå. Kardinaltallet til en mengde x betegnes med "Ca(x)" og defineres slik:

(27) Ca(a) = (μx)(Ord(x) & (Ef)(f: x -(1-1,på) -> a))

Man ser fra denne definisjonen at kardinaltallet til mengden a er det minste ordinaltallet som kan en-entydig avbildes på mengden a. Klassen av kardinaltall betegner vi med Card og definerer:

(28) Card = Mg(y: Ord(y) & (Ex)(y=Ca(x)))

Klassen av de uendelige kardinaltall, Card;u defineres slik:

(29) Card;u = Card – *w*

Fra definisjon (28) fremgår det at Card Inkl On. Kardinaltallene er altså spesielle ordinaltall. Siden relasjonen < er en velordning over On vil < også velordne kardinaltallene. Det første, andre, tredje..... element i denne velordningen betegnes med henholdsvis "Aleph(0)","Aleph(1)", "Aleph(3)", ... Aleph(*w*) vil da være det kardinaltallet som kommer på plassen *w* i denne velordningen.

Vi vil nå gi en definisjon av denne aleph-funksjonen som her betegnes med "Aleph". Men først fikseres en viss relasjon e som defineres på den følgende måte:

(30) e = Mg(<x,y>: yê(Card;u-Rgn(x)) & (Card;u- Rgn(x))Ω (E;-1)"{y} =ø)

Dernest definerer vi uttrykket "Kardinaltallet som kommer på plassen x i rekken av kardinaltall", som vi forkorter med "Aleph(x)" ved:

(31) Aleph(x) = l(e)‘x

Helt tilslutt i denne paragrafen vil vi definere visse begreper man trenger i forbindelse med bevisene for endel satser om ordinaltall. [16] Uttrykket "Den leksikografiske ordningen av alle par av ordinaltall", "Le", er definert ved:

(32) Le = Mg(<<x,y>,<z,w>>: x,y,z,wêOn & (x<z v (x=z & y<w)))

Ved hjelp av den leksikografiske ordningen Le kan man i sin tur definere relsjonen R;0 slik:

(33) R;0 = Mg(<<x,y>,<z,w>>: x,y,z,wêOn & Max(x,y)<Max(z,w)v
(Max(x,y)=Max(z,w) & <x,y>Le<z,w>))

Det kan bevises at R;0 er en velfundert relasjon over klassen av ordinaltallspar Prod(On,On). Tilslutt angis konstruksjonen av en ordensbevarende og en-entydig avbildning av denne velordningen av ordinaltallsparene på rekken av ordinaltall. Først innføres g;0 ved:

(34) g;0 = Mg(<x,y>: yê(Prod(On,On) - Rgn(x)) &
(Prod(On,On)-Rgn(x))Ω((R;0):-1)"{y} =ø)

Dernest defineres isomorfien J;0 mellom <R;0,Prod(On,On)> og <E,On> slik:

(35) J;0 = l(g;0)

Dermed har vi nådd slutten av den rekken av begreper som vi kortfattet ønsket å gjøre rede for i denne paragrafen.

---

15 Se i denne forbindelse Takeuti [1], Definisjon 10.7, 10.36 og 10.42. Våre definisjoner her er bare omskrivninger av de tilsvarende definisjoner i denne boken.

16 I forbindelse med definisjonene (32) - (35) bør man igjen konsultere Takeuti [1], Definisjon 7.53, Definisjon 7.55 og Definisjon 7.57. Man bør også lese sluttbemerkningene i kapittel 7 i denne bok.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§16 Satser i mengdelæren.

Så langt har det blitt gitt definisjoner av de viktigste av alle de rent mengdeteoretiske begrepene det etterhvert vil bli gjort bruk av i våre forskjellige arbeider. La nå L være et språk i familien <L;e[Δ]>/Δ Inkl P/ og betrakt første-ordens teorien ZFCu(L). Så langt har det ikke blitt gjort noe forsøk på å angi setninger som er teoremer i ZFCu(L). Dette skal heller ikke gjøres i detaljert her. Imidlertid vil vi stort sett alltid når vi trenger en mengdeteoretisk setning formulere den eksplisitt. Det bemerkes i denne forbindelse at de mengdeteoretiske setningene som vil bli brukt alltid vil være bevisbare i ZFCu(L).

I boken "Introduction to Axiomatic Set Theory" av G. Takeuti og W.M. Zaring, den boken vi har henvist til som Takeuti [1], gis en fremstilling av det mengde-teoretiske systemet ZFC som avviker noe fra det systemet med urindivider som fremstilles her. Dog er det slik at alle de begrepsdannelsene som ble innført i §13 - §15 defineres på nøyaktig samme måte i den nevnte bok i kapitlene 1 - 11. Faktisk er overenstemmelsen nærmest fullstendig med unntak av et par definisjoner når man ser bort fra at det i endel definisjoner har benyttet en litt annen notasjon. De definisjonene det dreier seg om, hvor det er en viss forskjell, er for det første definisjonen av potensmengden til en mengde og definisjonen av en fundert relasjon over en mengde. I den sistnevnte definisjon har vi føyd til forbeholdet om at de diverse delmengder av a skal være mengder. Dette forbehold sløyfes i Takeuti [1]. (Se Takeuti [1] side 27, Definisjon 6.21) fordi deres system er et som ikke tillater eksistensen av urindivider. Tilsvarende forhold gjelder definisjonen av potensmengde. Det bør også nevnes at vår notasjon stort sett er identisk med den i Takeuti [1], bortsett fra visse unntak.

Når det gjelder det mengdeteoretiske systemet i Takeuti [1] er dette ekvivalent med vårt system om man til dette legger til som et nytt ikke-logisk aksiom setningen "(Ax)M(x)", dvs. den setningen som sier at alt er mengder. Imidlertid brukes ikke dette aksiomet i beviset for noen av alle de setninger som utledes i Takeuti [1] i kapitlene 5 - 11 og en nærmere inspeksjon av bevisene viser at de ordrett kan brukes i forbindelse med vårt system ZFCu(L). Dette innebærer at Teorem 5.7 - 5.24 i kapittel 5 i Takeuti [1], teoremene 6.2 -6.33 i kapittel 6, teoremene 7.2 - 7.56 i kapittel 7, teoremene 8.2 - 8.50 i kapittel 8, teoremene 9.1 -9.7 i kapittel 9, teoremene 10.2 - 10.70 i kapittel 10 og endelig teoremene 11.2 - 11.29 i kapittel 11 i alt vesentlig kan utledes ordrett slik de står i vårt system og med i alt vesentlig det samme bevis som det som er gitt i den nevnte bok.

Vi vil når vi formulerer og bruker et av disse teoremer henvise til det ved å skrive "TZTeorem 8.2", "TZTeorem 11.21", "TZTeorem 9.4" osv. Uttrykket "TZTeorem 8.2" betyr da som man lett skjønner Teorem 8.2 i kapittel 8 i Takeuti [1].

Dermed skulle vi ha gitt en tilstrekkelig utførlig beskrivelse av de mengdeteoretiske setningene som vi akter å gjøre bruk av.

§17 Innføring av de reelle tall og et aksiomsystem for de reelle tall.

I forskjellige forbindelser vil det senere bli anledning til å betrakte funkjoner som tilordner ymse størrelser reelle tall. Av denne grunn er det nå gunstig, for senere henvisninger, å innføre de vanlige tallbegreper som naturlig tall, rasjonalt tall og reellt tall og de operasjoner som vanligvis utføres på slike tall. I tillegg vil det også bli detaljert vist hvordan disse begrepene defineres innenfor rammen av den mengdelæren som har blitt beskrevet.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§17.1 Fire nye primitive predikater.

I tidligere paragrafer avgrenset vi språkfamilien <L;e[Δ]>/Δ Inkl P/. Vi betrakter nå de følgende predikatkonstruksjoner over klassen av uttrykk i L;e. Merk forøvrig i denne forbindelse at klassen av uttrykk er den samme i alle våre språk. Konstruksjonene som skal betraktes er: (1) "x er et reellt tall", som forkortes med "Reell(x)". (2) "x er et positivt reellt tall". Dette uttrykket forkortes med "Reell;p(x)". (3) "x er summen av det reelle tall y og det reelle tall z". I forbindelse med dette predikatet bruker vi "Sum(x,y,z)" som forkortelse. (4) "x er produktet av det reelle tallet y og det reelle tallet z". Denne konstruksjonen forkortes med "Prod(x,y,z)". Mengden som inneholder nøyaktig disse fire predikatene kalles for Δ;r.

Den familien med språk som ligger til grunn for betraktningene i dette avsnittet er L;e[Δ;rUZ]/Z inkl (P-Δ;r)/. Sagt på en annen måte betraktes alle de første-ordens språkene som fremkommer når man legger alle predikatene i Δ;rUZ til predikatene i det ikke-logiske vokabularet til L;e, i det det forutsettes at Z er en mengde med predikater hvor elementene ikke er blandt predikatene i Δ;r eller i vokabularet til L;e.

§17.2 Definisjoner av en rekke viktige begreper i teorien om de reelle tall.

Predikatene i Δ;r, dvs. predikatene som ble innført i forrige paragraf, er udefinerte predikater i familien L;e[Δ;rUZ]/Z inkl (P-Δ;r/. I det følgende vil vi innføre en rekke definisjoner der vi definerer de viktigste begrepene vi har bruk for i forbindelse med de reelle tall. De uttrykk som vi dermed innfører vil følgelig være definerte uttrykk i språkene i den nevnte språkfamilien og ikke primitive uttrykk.[17] Mengden av de reelle tall, Re, summen av de reelle tall x og y, x+y, og produktet av de reelle tall x og y, x·y, samt mengden av de positive reelle tall, Re;p defineres slik:

(1) Re = Mg(x: Reell(x))
(2) x+y = (iz)(Sum(z,x,y))
(3) x·y = (iz)(Prod(z,x,y))
(4) Re;p = Mg(x Reel;p(x)).

Tallene 0 og 1, -x, x/y, x-y og x;-1 når x og y er reelle tall innføres ved de følgende de følgende definisjoner:

(5) 0 = (iy)((Ax)(xêRe –> x+y=x) & yêRe)
(6) 1 = (iy)((Ax)(xêRe –> x·y=x) & yêRe)
(7) (-x) = (iy)(yêRe & x+y=0)
(8) x;-1 = (iy)(yêRe & x·y=1)
(9) x/y = x·(y;-1)
(10) x- y = (iz)(zêRe & y+z=x)

Vi definerer hva som menes med at x er mindre enn y, x<y, x er mindre eller lik y, x≤y, x er større enn y, x>y og x er større eller lik y, x≥y, ved de følgende definisjoner:

(11) x<y <–> (x - y)êRe;p
(12) x≤y <–> (x<y v x=y)
(13) x>y <–> x<y
(14) x≥y <–> y≤x.

[17] Definisjonene i denne paragrafen skulle være standardpreget og ikke særlig vanskelige å forstå.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Klassen av de naturlige tall, Nat, er definert som den minste mengden som inneholder 0 og som dessuten inneholder x+1 om den inneholder x, forutsatt at x er et vilkårlig reellt tall:

(15) Nat = SN(Mg(y: M(y) & y Inkl Re & 0êy & (Ax)(xêy –> (x+1)êy)))

De hele tall betegnes med Hel. Denne mengden er definert slik:

(16) Hel = Nat U Mg(-x : xêNat)

Mengden av de rasjonale tall, Rat, defineres på denne måten:

(17) Rat = Mg(x·(y;-1) : xêHel & yêHel & y≠0)

Man sier at x er en øvre grense for en mengde y av reele tall, i symboler G;ø(x,y), dersom og bare dersom tallet x er større eller lik hvert tall i y. Uttrykket "G;ø(x,y)" defineres formelt slik:

(18) G;ø(x,y) <–> (xêRe & M(y) & y Inkl Re & (Az)(zêy –> z≤x))

Tilsvarende sier man at x er en nedre grense for en mengde y av reelle tall hvis og bare hvis x er mindre eller lik ethvert tall i mengden y. Vi skriver "G;n(x,y)" som forkortelse for "x er en nedre grense for mengden y" og definerer:

(19) G;n(x,y) <–> (xêRe & M(y) & y Inkl Re & (Az)(zêy –> x≤z))

Det minste tall blandt alle de tall som er en øvre grense til en gitt reell tallmengde y kalles for den minste øvre grense til y, i symboler "Sup;r(y)":

(20) Sup;r(y) = (iz)(G;ø(z,y) & ¬(Ew)(wêRe & w<z & G;ø(w,y)))

På tilsvarende vis er den største nedre grense til en tallmengde y av reelle tall det største tall blandt alle de reelle tall som er nedre grenser til y. Vi betegner den største nedre grensen til tallmengden y av reelle tall med "Inf;r(y)" og definerer:

(21) Inf;r(y) = (iz)(G;n(z,y) &¬(Ew)(wêRe & w>z & G;n(w,y)))

Det minste tallet i mengden y, Min;r(y), og det største tallet i mengden y, Max;r(y), er definert på den følgende måte:

(22) Min;r(y) = (iz)(zêy & (Ax)(xêy –> x≥z))
(23) Max;r(y) = (iz)(zêy & (Ax)(xêy –> x≤z))

Man ser nokså lett på grunnlag av definisjonene (18) - (23) at de følgende identiteter holder:

Sup;r(y) = Min;r(Mg(x: G;ø(x,y))) om (Ez)(z= Sup;r(y))
Inf;r(y) = Max(Mg(x: G;n(x,y))) om (Ez)(z=Inf;r(y))

I det følgende innføres en rekke tallteoretiske begreper ved eksplisitte definisjoner og ikke ved implisitte rekursive definisjoner (noe som er mer vanlig):

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(24) Pt(x) = (is)(Func(s) & Dom(s) = Nat &
s(0) =1 & (An)(nêNat –> s(n+1)=s(n)·x))

Uttrykket "Tallet x opphøyd i n'te potens", "x^n" innføres ved:

(25) x^n= (pt(x))‘n

Dernest innføres "Sum(f,m)" ved:

(26) Sum(f,m)= (is)(Func(s) & Dom(s)=N & s(0) = f(m) &
(An)(nêNat –> s(n+1)= s(n) + f(m+(n+1))))

Summasjonstegnet ∑ defineres slik:

(27) ∑/j,k,n/(f(j)) = (Sum(f,k))‘(n-k)

Uttrykket "∑/j,k,n/(f(j))" leses "Summen av alle de diverse tallene f(i) ettersom j gjennomløper rekken av de naturlige tall fra og med tallet k til og med tallet n". Funksjonen Prod innføres ved den følgende definisjon:

(28) Prod(f,k) = (is)(Func(s) & Dom(s)=Nat & s(0) = f(k) &
(An)(nêNat –> s(n+1) = s(n)·f(k+(n+1))))

Produktasjonstegnet "∏" defineres på den følgende måte:

(29) ∏/j,k,n/(f(j)) = Prod(f,k)‘(n-k)

Uttrykket "∏/j,k,n/(f(j))" leses "Produktet av de diverse tallene f(j) ettersom j gjennomløper rekken av de naturlige tall fra og med tallet k til og med tallet n".
Vi innfører uttrykket "x fakultet", i symboler "x!" ved først å sette:

(30) Fak = (is)(Func(s) & Dom(s) = Nat & s(0)=1 &
(An)(nêNat –> s(n+1)= s(n)·(n+1))

Uttrykket "x!" kan dernest defineres således:

(31) x! = Fak‘x

Tilslutt innfører vi tallet 2, Abs(x), absoluttverdien til tallet x, og Rot(n,x), n'te roten til tallet x ved de følgende definisjoner:

(32) 2 = 1+1
(33) Abs(x) = (iy)((yêRe & x≥0 &y=x) v (yêRe & y<0 & y = (-x)))
(34) Rot(n,x) = (iy)(yêRe & ((Em)(mêNat & n=2·m +1 & y^n =x) v
(Em)(mêNat & n=2m & y^n =x & y≥0)))

I forbindelse med definisjonene (24) - (31) er det på sin plass med enkelte bemerkninger. Det er vanlig å definere f. eks. x^n induktivt ved de følgende to ligninger:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(i) x^0 = 1
(ii) x^(n+1) = x^n·x

Man gir imidlertid da ikke noen direkte eksplisitt definisjon som viser hvordan uttrykket "x^n" kan oversettes til primitiv notasjon i de sammenhenger hvor det forekommer, f.eks. i de sammenhenger hvor variabeltegnet "n" bindes av en kvantor. Dette er grunnen til at vi ikke har brukt (i) og (ii) som definisjoner av "x^n". Studerer man den definisjonen som ble gitt ovenfor ser man at den gir en slik oversettelsesregel. Videre bemerkes at man på grunnlag av ZFCu-aksiomene og de aksiomer for reelle tall som formuleres i den neste paragraf kan bevise at dersom xêRe så finnes det en entydig bestemt funksjon s som har Nat som domene og som er slik at

s(0) = 1 & (An)(nêNat –> s(n+1)=s(n)·x)

Videre kan man vise at ligningene (i) og (ii) ovenfor kan utledes ved hjelp av definisjonene (24) og (25). I lys av dette er den fremgangsmåten som har blitt beskrevet fullt formålstjenlig og fra en grunnlagsteoretisk synsvinkel mer direkte og eksplitt enn den mer vanlige fremgangsmåten.

Tilsvarende bemerkninger kan åpenbart gjøres i forbindelse med de definisjonene som ble gitt av uttrykkene "∑/j,k,n/(f(j))" , "∏/j,k,n/(f(j))" og "x!".

§17.3 Et aksiomsystem for mengden av de reelle tall.

Anta L er et språk i familien <L;e[Δ;rUZ]>/ Z Inkl (P - Δr)/. Konjunksjonen av formlene (1) - (18) nedenfor kalles for AxR. ("AxR" leses "Konjunksjonen av aksiomene for de reelle tall") Vi har at AxR ê Fm(L) fordi de enkelte formlene (1) - (18) er formler i L. Formelmengden i L som bare inneholder AxR betegner vi med "R", mao. R = {AxR}. Teorien ZFCu(L)[R] er da den teorien i L som har som ikke-logiske aksiomer alle ZFCu-aksiomene i L samt setningen AxR. På dette punkt nevnes at alle de setningene om reelle tall som det senere vil bli bruk for er utledbare i teorien ZFCu(L)[R]. La oss så formulere de aksiomene for reelle tall som vi ønsker å benytte. Det er nøyaktig de følgende formler:[18]

(1) (Ey)(M(y) & y = Re) & Re≠ø
(2) Re:p Inkl Re & M(Re;p)
(3) x,yêRe –> x+y ê Re
(4) x,yêRe –> x·y ê Re
(5) x,yêRe –> x+y = y+x
(6) x,yêRe -> x·y = y·x
(7) x,y,zê Re –> x+(y+z) = (x+y)+z
(8) x,y,zêRe –> x·(y·z) = (x·y)·z
(9) x,y,zêRe –> x·(y+z) = x·y + x·z
(10) (Ex)(x=0) & (Ex)(x=1)
(11) 0≠1
(12) xêRe –> (E!y)(yêRe & x+y =0)
(13) xêRe & x≠0 –> (E!y)(yêRe & x·y = 1)
(14) xêRe;p & yêRe;p –> (x+y)êRe;p
(15) xêRe;p & yêRe;p –> x·yêRe;p
(16) xêRe & x≠0 –> [(xêRe;p v (-x)êRe;p) & ¬(xêRe;p & (-x)êRe;p)]
(17) ¬(0êRe;p)
(18) x≠ø &M(x) & x Inkl Re &(Ey)(G;ø(y,x)) –> (Ez)(z=Sup;r(x))

18 Dette aksiomsystemet er hentet fra Apostol [1], kapittel 1, §1.6 - §1.17.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§17.4 Kommentarer til aksiomsystemet.

Man ser at aksiomene (1) og (2) i §17.3 sier at mengden av alle de reelle tall faktisk er en mengde, eller sagt på en annen måte, at det faktisk finnes en entitet som er identisk med mengden av de reelle tall og at denne entiteten er en mengde. Det andre aksiomet sier at de reelle positive tall er inkludert i mengden av de reelle tall. Studerer man videre aksiomene (3) - (13) ser man at disse for det første sier at mengden av de reelle tall er lukket under operasjonene addisjon og multi-plikasjon, videre sier aksiomene at addisjon og multiplikasjon er operasjoner som er assosiative og kommutative, og at multiplikasjon kan distribueres over addisjon. Dette er i det vesentlige innholdet i aksiomene (3) - (9). Aksiomene (10) - (13) postulerer så den entydige eksistens av et nullelement og et enhets-element og entydig bestemte negative elementer og inverse elementer. Et en-tydig bestemt inverst element finnes naturligvis bare for de reelle tall som er forskjellige fra 0.

Tidligere ble relasjonen < definert ved:

(i) $x<y <-> (x - y)\hat{e}Re;p.$

Aksiomene (14) - (17) trengs for at man skal kunne vise at <-relasjonen har de egenskaper som det er naturlig å tillegge den. Hvis man bruker definisjonen (i) er det bare om man legger til disse aksiomene at det kan bevises at <-relasjonen har slike egenskaper som å være sammenhengende, lineær, tett, venstresidig og høyresidig total og irrefleksiv. Dette er egenskaper som man åpenbart må kreve at denne relasjonen skal ha.

Tilslutt har vi lagt til aksiomet (18) som kan kalles "Minste øvre grense"-aksiomet og som sier at enhver ikke-tom oventil begrenset mengde av reelle tall har en minste øvre grense. Dette aksiomet er nødvendig om man ønsker å vise at rekken av de naturlige tall er uendelig. Dette er åpenbart av vital betydning. Videre er aksiomet nødvendig for å vise at mengden av de reelle tallene har den "Arkimediske" egenskap dvs. at den følgende lov holder:

$(Ax)(x\hat{e}Re \,\&x>0 -> (Ay)(y\hat{e}Re -> (En)(n\hat{e}Nat \,\&\, n\cdot x > y)))$

Ytterligere er aksiomet nødvendig om man ønsker å vise at f.eks. Rot(n,x) eksisterer om $x\hat{e}Re;p$ og $n\hat{e}Nat$. Ingen av disse setningene – som er av avgjørende betydning for den videre oppbygning av analysen – kan bevises på grunnlag av bare (1) - (17), selvom vi forutsetter at vi har til rådighet alle ZFCu-aksiomene. Det bør også nevnes at alle de rasjonale tall, Rat, oppfyller alle aksiomene (1) - (17), men ikke aksiomet (18). Dette innebærer at (18) er det aksiomet som gjør det mulig, innenfor den rammen vi her har satt opp, å bevise eksistensen av irrasjonale tall, dvs. å vise at $(Re - Rat)\neq\emptyset$.

§17.5 Distinksjonen mellom addisjon og multiplikasjon mellom ordinaltall og reelle tall.

Det er gode grunner til å bemerke at man strengt tatt må sondre helt klart mellom de addisjons- og multiplikasjonsoperasjoner som vi har innført mellom ordinaltall i §15, definisjonene (22) og (24), og de tilsvarende, men langt fra identiske operasjoner som ble innført i §17.2 ved definisjonene (3) og (4). Her skulle vi egentlig ha brukt forskjellige symboler og f.eks. skrevet konsekvent "+:r" og "·;r" når det er tale om addisjon og multiplikasjon mellom reelle tall i motsetning til addisjon og multiplikasjon mellom ordinaltall. Imidlertid vil det i praksis ikke kunne oppstå noen særlig alvorlige misfortåelser på dette punkt fordi man i de fleste tilfelle hvor "+" og "·" forekommer i en formel fra konteksten lett vil kunne se om det dreier seg om addisjon eller multiplikajon mellom

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

ordinaltall eller reelle tall. En tilsvarende flertydighet er tilstede ved uttrykket "x<y". Vi har innført dette (i) som en mindre-enn relasjon mellom ordinaltall og (ii) som en relasjon mellom reelle tall. Også her burde det for tydelighetens skyld vært brukt f.eks. "<;r" for å betegne mindre-enn relasjonen mellom de reelle tall og brukt "<" for å betegne den tilsvarende, men ikke identiske relasjon, mellom ordinaltall. I praksis vil det dog ikke være store vanskeligheter forbundet med å avgjøre hva "<" står for. Tilslutt nevnes at klassen av de naturlige tall, Nat, som ble definert i §17.2 selvfølgelig må holdes adskilt fra mengden *w* som omfatter alle endelige ordinaltall og som ble introdusert i §15 ved definisjon (11). Det man derimot kan vise er at det er en en-entydig strukturbevarende avbildning mellom Nat og *w*.

§17.6 Reduksjon av teorien om de reelle tall til mengdelære.

I §17.1 innførte vi predikatene "Reell(x)","Reell;p(x)", "Sum(z,x,y)" og "Prod(z.x,y)" som nye primitive predikater. Vi vil nå vise hvordan disse predikatene kan defineres utelukkende ved hjelp av de to primitive predikatene "M(x)" og "xêy". Dette innebærer at vi vil vise hvordan man gir rent mengdeteoretiske definisjoner av disse grunnbegrepene i teorien om de reelle tall. Det følger da at alle formlene i L;e[Δ;rUZ] der Z Inkl (P-Δ;r) kan oversettes til formler i L;e[Z]. De definisjonene som vil bli gitt er også av en slik art at aksiomene (1) - (18) i §17.3 kan utledes som teoremer i ZFCu(L;e[Z]) om de angitte definisjonene benyttes.

De definisjonene som vil bli presentert her finnes omtalt i Quines bok "Set Theory and Its Logic" (Se Quine [1], side 119 - 138). Vi henviser derfor leseren til denne boken for en mer utførlig og grundig motivasjon av de begrepsdannelsene vi nå innfører.[19]

Først definerer vi par-funksjonen Par ved:

(1) Par = Mg(<<x,y>,z>: x,y,zê*w* & z= (x+(x+y)^2))

Vi kaller dette en par-funksjon fordi den en-entydig avbilder wXw på w, og fordi vi har at Par(x,y)= Par(z,w) hvis og bare hvis x=z og y=w såfremt x,y,z,w er endelige kardinaltall. Vanligvis identifiserer man det rasjonale tall m/n (der m,n er naturlige tall) med mengden av alle de tallpar <q,r> der man har q·n=m·r. Quine's metode er å identifisere m/n med alle de tallpar <q,r> der q·n<m·r. Dette er bakgrunnen for den følgende definisjon:

(2) x/y = Mg(Par(z,w): z,wê*w* & z·y < x·w)

Det kan synes naturlig å definere de positive rasjonale tall som mengden av alle x/y slik at x,yê*w* &y≠ø. Imidlertid vil vi identifisere klassen av de rasjonale tall med mengden av alle par <a,0> og <0,b> der a og b er med i den mengden som nettopp ble nevnt. Vi definerer derfor "Klassen av kvasirasjonale tall", "Rat;k" ved:

(3) Rat;k = Mg(x/y: x,yê*w* &y≠ø)

[19] De to grunnleggende metoder for å konstruere systemet av reelle tall fra systemet av naturlige tall ble angitt av Cantor og Dedekind. Forskjellen i disse metodene kommer tilsyne ved utvidelsen av de rasjonale tall til de reelle tall. En annen måte å utvide systemet av de naturlige tall til systemet av reelle tall på enn den som er angitt her og som følger prosedyren i Quine [1] er detaljert forklart i Stoll [1], kapittel 3, side 130 - 158. Vi kunne naturligvis i stedet ha redegjort for denne metoden, men Quines virker noe mer elegant selvom dette er av underordnet betydning i denne forbindelse.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Man ser fra (2) og (3), samt definisjon (1), at de diverse x/y er klasser av endelige ordinaltall. Ved noe ettertanke skulle man kunne innse at den naturlige mindre-enn relasjonen over Rat;k er mengdeinklusjon, altså relasjonen Inkl. Er x Inkl Rat;k, mao. er x en mengde med kvasirasjonale tall så er det derfor nærliggende å si at vêRat;k er en øvre grense for x om (Az)(zêx –> z Inkl v). Dette er ekvivalent med (Az)(zêx –> (Ay)(yêz –> yêv)). Dette er i sin tur ekvivalent med (Ay)((Ez)(yêz & zêx) –> yêv) som innebærer nøyaktig det samme som at UN(x) Inkl v. Siden vi nå har (Az)(zêx –> z Inkl UN(x)) vil altså UN(x) være den minste øvre grense til x. Vi identifiserer de kvasi-reelle tall, Reell;k, med klassen av alle minste øvre grenser til begrensede mengder av rasjonale tall. Dette er så motivet bak den følgende definisjon:

(4) Reell;k = Mg(UN(x): M(x) & x Inkl Rat;k &
(Ev)(vêRat;k & (Az)(zêx –> z Inkl v)))

Det er nokså lett å vise at Rat;k Inkl Reell;k og at ø=oêRat;k. Det er i denne forbindelse gunstig å la alle par av typen <x,0> der xêReell;k representere de negative reelle tall og alle par av typen <0,x> representere de positive reelle tall. Vi definerer derfor predikatet "Reell(x)" ved:

(5) Reell(x) <–> (Ey)(yêReell;k & (x=<y,0> v x=<0,y>))

Vi definerer de positive reelle tallene på den følgende måte:

(6) Reell;p(x) <–> (Ey)(yêReell;k & y≠0 & x=<0,y>)

Dermed er de to første predikatene i Δ;r definert.

Produktet av to kvasireelle tall "Prod;k(x,y)" defineres ved:

(7) Prod;k(x,y) = Mg(Par(h·m,k·n): h,k,m,nê*w* &
Par(h,k)êx & Par(m,n)êy)

Denne definisjonen trenger noen kommentarer. Vi ønsker at Prod;k(x,y) intuitivt sett skal være klassen av alle de naturlige tall Par(z,w) som er slik at z/w er mindre enn Prod;k(x,y). Men z/w vil være slik i klassisk aritmetikk nøyaktig i de tilfelle hvor z/w selv kan uttrykkes som et produkt av rasjonale tall h/k og m/n som er mindre enn henholdsvis x og y. Men h/k er mindre enn x i nøyaktig det tilfelle at Par(h,k)êx. Det samme gjelder for m/n og produktet av h/k og m/n som åpenbart er h·m/k·n. Det er av denne grunn vi har definert produktet av to kvasireelle tall på den måten som er vist ved (7).

Et helt tilsvarende uformelt resonnement kan brukes til å begrunne den følgende definisjon av summen av to kvasireelle tall, Sum;k(x,y):

(8) Sum;k(x,y)= Mg(Par(h·n+m·k,k·n): h,k,m,nê*w* &
Par(h,k)êx & Par(m,n)êy)UxUy

Relasjonen mindre- enn mellom de kvasi-reelle tall, <;k defineres slik:

(9) x<;k y <–> (Ez)(z≠0 & y= Sum;k(x,z))

Relasjonen mindre- enn mellom de reelle tall, <;r defineres slik:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(10) x<;r y <–> (Reell(x) & Reell(y) &
(Ez)(Ew)(Ep)(Ek)(x=<p,k> & y=<z,w> &
((k≠0 & k Sinkl w)v (k=0 & z SInkl p))))

Vi definerer differansen mellom to kvasireelle tall ved:

(11) Dif;k(x,y) = (iz)(Reell;k(z) & Sum;k(y,z) = x)

Vi kan så gi definisjonen av "Sum(z,x,y)" på denne måten:

(12) Sum(z,x,y) <–> [Reell(x) & Reell(y) &
(Ea)(Eb)(Ec)(Ed)(x=<a,b> & y=<c,d> &
(a=0 & c=0 & z=<0, Sum;k(b,d)) v
(b=0 & d=0 & z=<Sum;k(a,c),0>) v
(b=0 & c=0 & ((a ≤;k d & z=<0,Dif;k(d,a)>)v
(a>;k d & z=<Dif;k(a,d),0>))) v
(a=0 &d=0 &((c ≥;k b & z=<Dif;k(c,b),0>) v
((b >;k c & z=<0,Dif;k(b,c)>))))]

Definisjonen av "Prod(z,x,y)" formuleres slik:

(13) Prod(z,x,y) <–> [Reell(x) & Reell(y) &
(Ea)(Eb)(Ec)(Ed)(x=<a,b> & y=<c,d> &
(a=0 & c=0 & z=<0,Prod;k(b,d)>) v
(b=0 & d=0 & z=<0,Prod;k(a,c)>) v
(a=0 & d=0 & z=<Prod;k(b,c),0>) v
(b=0 & c=0 & z=<Prod;k(a,d),0>)

Når det gjelder de noe kompliserte formlene (12) og (13) er noen kommentarer også her på sin plass. Vi kan med definisjon (8) sies å ha definert addisjon mellom de positive reelle tall inkludert null. Når man skal utvide denne definisjonen til hele den reelle talllinjen må man imidlertid sondre mellom forskjellige tilfelle. Anta at x og y er to reelle tall. Vi kan da i lys av definisjon (5) ha at (i) x=<0,a> og y=<0,b> for noen kvasi-reelle tall a og b. I så tilfelle virker det rimelig å sette x+y = <0, Sum;k(a,b)>. (ii) Vi kan ha det tilfelle at x=<a,0> og y=<b,0> der a og b er kvasi-reelle tall. I så tilfelle virker det rimelig å betrakte x+y som et negativt tall og derfor sette x+y=<Sum;k(a,b),0>. (iii) Den tredje muligheten er at x=<a,0> og y=<0,b> der a og b er kvasi-reelle tall. I så tilfelle må vi sondre mellom to undertilfelle: (iiia) b>;k a. Da lar vi x+y = <0,Dif;k(b,a)>. (iiib) b≤;k a. da kan vi sette x+y=<Dif;k(a,b),0> (iv) Som en fjerde mulighet har vi at x=<0,a> og y=<b,0> der a og b er kvasi-reelle tall. Er da a>;k b setter vi x+y=<0,Dif;k(a,b)>. Er på den annen side a≤;k b setter vi x+y = <Dif;k(b,a),0>.

Definisjonen (12) er noe komplisert fordi vi har bygd disse tilfellene inn i definiens. Tilsvarende betraktninger kan gjøres i forbindelse med definisjon (13).

Dermed har vi definert alle de primitive predikatene i Δ;r utelukkende ved hjelp av mengdeteoretiske begreper og vist hvordan formlene i L;e[Δ;rUZ] der Z tenkes å være en delmengde av P-Δ;r kan oversettes til formler i L;e[Z].

§18 Konklusjon og oppsummering.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Det vi har gjort i §1 - §17 har hovedsakelig vært det følgende. Vi har definert nøyaktig og presist første-ordens språkene L;= og L;e samt den mer generelle språkfamilien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/ der P er mengden av alle meningsfulle norske predikatkonstruksjoner over klassen av uttrykk i L;=. Dette har vi gjort fordi de viktigste av de teoriene vi i andre arbeider vil betrakte kan formuleres og undersøkes innenfor språk som hører til denne familien. Det neste vi gjorde var så å avgrense klassen av de logiske aksiomene i L når L var et språk i familien <L;=[Δ]>/Δ Inkl P/. Videre definerte vi hva som skulle forstås med en første-ordens teori i L. Vi ga også en redegjørelse for hva vi forstår med teoremene i en første-ordens teori over L og redegjorde for hva som menes med et bevis i en slik teori. Dernest beskrev vi klassen av ZFCu-aksiomene i L. Disse aksiomene vil inngå i alle de teoriene vi kommer til å arbeide med som ikke-logiske aksiomer. Teorien ZFCu(L) ble så beskrevet. I forbindelse med det som her er nevnt gjorde vi også rede for de viktigste syntaktiske begrepene vi trenger. I §11 - §17 introduserte vi beskrivelsestermer og mengdeabstraksjonstermer og vi ga så en rekke med definisjoner som innfører alle de grunnleggende mengdeteoretiske begrepene og alle de begrepene i teorien om de reelle tall som vi umiddelbart vil ha bruk for i våre andre arbeider.

I denne forbindelse vil vi gjerne understreke at intet av det stoffet som inngår i §1 - §17 er av original karakter. Det eneste som kan sies å være nytt er vår utforming av ZFCu-aksiomene, men muligheten av å formulere en slik versjon av ZFC har tidligere blitt forutsett av andre, om ikke akkurat utpenslet i detalj på den måten som det er gjort her. Det bør også understrekes at den lange rekken av definisjoner som har blitt gitt i §1 - §17, og som delvis kan virke temmelig trettende, bare er gitt for at leseren skal ha muligheten til å sette seg nøyaktig inn i hvilken notasjon vi benytter og nøyaktig hvilket meningsinnhold som tillegges de uttrykk av mer teknisk karakter som vi bruker. Disse paragrafer er bare ment som en oversikt og oppsummering og ikke som noe substitutt for passende innførings-skrifter i predikatlogikk og mengdelære. Av denne grunn har vi ikke tatt med noen detaljert begrunnelse og motivasjon i tilknytning til de enkelte definisjoner, skissert alternative definisjoner og aksiomer og diskutert de muligheter som oppstår i denne forbindelse på noen særlig inngående måte. Heller ikke har vi utledet noen teoremer siden dette allerede er gjort i de skrifter vi har referert til.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Referanser

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Referanser

Apostol [1], Apostol, Tom M., "Calculus" Vol I., Blaisdell Publishing Company. New York - London 1962.
Bell & Slomson [1], J. L. Bell and A. B. Slomson, "Models and Ultraproducts. An Introduction", North Holland, Amsterdam, 1969.
Drake [1], Drake, Frank R., "Set Theory. An Introduction to Large Cardinals", North Holland publishing company, 1974.
Quine [1], Quine, Willard van Orman, "Set Theory and Its Logic", The Belknap press of Harvard University press, Cambridge, Masschusetts, 1963.
Quine [2], Quine, Willard van Orman, "Methods of Logic", London Routledge and Kegan Paul, 1952, Second edition revised, 1962.
Quine [3], Quine, Willard van Orman, "Mathematical logic", Harper Torchbook, 1962
Stoll [1], Stoll, Robert R., "Set Theory and Logic", W.H. Freeman and Company, San Francisco and London,1963.
Takeuti [1], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Introduction to Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.
Takeuti [2], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
Shoenfield [1], Shoenfield, Joseph R., "Mathematical Logic", Addison Wesley, 1967.
Whitehead & Russel [1], Alfred North Whitehead and Bertrand Russel, "Principia Mathematica to 56#", Cambridge University Press, 1962.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Copyright beskrivelse

Dette arbeidet er © Morten Rognes 2002. Det er fullstendig fritt i den forstand at man kan kopiere det for eget bruk og distribuere kopier til andre så lenge dette ikke er for salg eller økonomisk vinning. *Kopier må være av arbeidet i sin helhet og i sin opprinnelige form slik det er distribuert her, og må i tillegg inneholde denne copyright-beskrivelsen skrevet på norsk* .

Det er lov til å sitere fra dette arbeidet i egne skrifter etter de regler og standarder som er internasjonalt akseptert for sitering i vitenskapelige publikasjoner. Under ingen omstendigheter er det lov å sitere deler av dette arbeid, eller hele dette arbeid, på en slik måte at man utgir det for å være ens eget.

Henvisninger til dette arbeid bør inneholde de følgende data i en komma-separert liste: etternavnet til denne forfatteren, fornavnet til denne forfatteren, tittelen på arbeidet, årstallet det opprinnelig ble skrevet som angitt på tittelbladet, uttrykket "Upublisert", den fullstendige URL fra hvilket dette arbeidet ble lastet ned, dato og årstall for nedlasting, samt det versjonsnummeret som er angitt på tittelbladet. Eksempel:

> Rognes, Morten, "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", 1985, Upublisert, http://www.uio.no/~mrognes/arbeider/mrog73a.sit.hqx, 4-4-2002, v1.00.